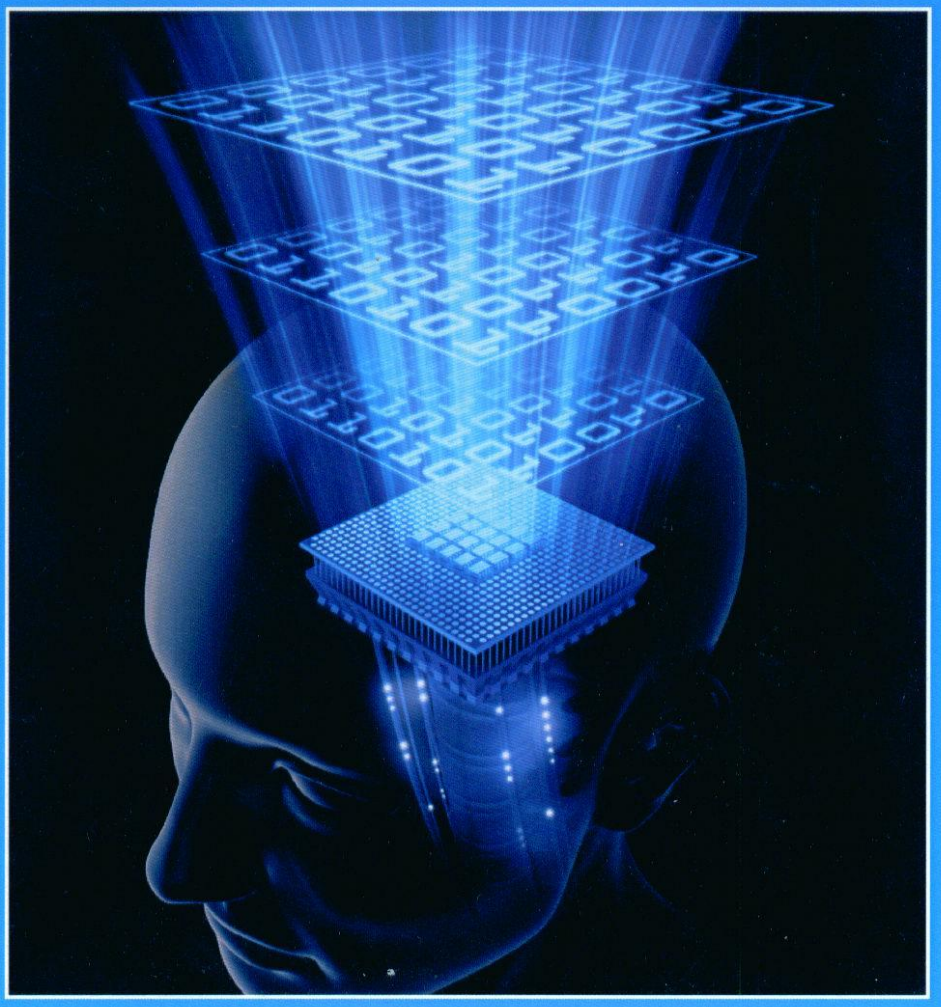
Florin Leon

Inteligență artificială:
raționament probabilistic, tehnici de clasificare



editura Tehnopress

Florin Leon

Inteligență artificială:
raționament probabilistic, tehnici de clasificare

editura
Tehnopress
IAȘI – 2012

Referenți științifici:
Prof. dr. ing. **Doru PĂNESCU**
Prof. dr. ing. **Silvia CURTEANU**

Editura TEHNOPRESS
Str. Pinului nr. 1A
700109 Iași
Tel./fax: 0232 260092
E-mail: tehnopress@yahoo.com
http://www.tehnopress.ro
Editură acreditată CNCSIS, cod CNCSIS 89

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
LEON, FLORIN
Inteligență artificială: raționament probabilistic, tehnici de clasificare / Florin Leon. – Iași: Tehnopress, 2012
Bibliogr.
ISBN 978-973-702-932-4

Familiei mele şi în special soţiei mele, Crina,
fără de care această carte nu s-ar fi scris acum

Cuprins

Partea I. Raţionament probabilistic

Capitolul 1. Probabilităţi şi paradoxuri

1.1. Interpretări ale probabilităţilor 11
1.1.1. Interpretarea frecventistă 11
1.1.2. Interpretarea fizică 13
1.1.3. Interpretarea subiectivistă 15
1.1.4. Probabilităţile în lumea cuantică 17
1.2. Paradoxuri 24
1.2.1. Problema „Monty-Hall” 24
1.2.2. Paradoxul cutiei lui Bertrand 27
1.2.3. Eroarea jucătorului de ruletă 27
1.2.4. Eroarea procurorului 27
1.2.5. Paradoxul lui Simpson 28

Capitolul 2. Fundamente teoretice

2.1. Probabilităţi condiţionate. Teorema lui Bayes 31
2.2. Independenţă şi independenţă condiţionată 35
2.3. Reţele bayesiene 37
2.4. Algoritmul Bayes-Ball 42
2.5. Sortarea topologică 49
2.6. Construcţia automată a reţelelor bayesiene 52

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 3. Raţionamente exacte

3.1. Calculul probabilităţii unei observaţii 55
3.2. Calculul probabilităţilor marginale 57
3.3. Inferenţa prin enumerare 59
3.4. Inferenţa prin eliminarea variabilelor 62
3.5. Variabile cu valori multiple. Ignorarea variabilelor irelevante .. 69
3.6. Cea mai probabilă explicaţie 71

Capitolul 4. Raţionamente aproximative

4.1. Introducere 73
4.2. Inferenţa stohastică prin ponderarea verosimilităţii 74
4.3. Alte metode de inferenţă aproximativă 83

Capitolul 5. Teoria evidenţelor

5.1. Teoria Dempster-Shafer 85
5.2. Surse multiple de evidenţă 91
5.3. Reguli alternative de combinare a evidenţelor 96
5.3.1. Regula lui Yager 97
5.3.2. Regula Han-Han-Yang 100
5.4. Concluzii 104

Partea a II-a. Tehnici de clasificare

Capitolul 6. Problematica generală

6.1. Introducere 107
6.2. Învăţarea supervizată 109
6.3. Definirea unei probleme de clasificare 113
6.4. Tipuri de atribute 114
6.5. Estimarea capacităţii de generalizare 116
6.6. Aplicaţii ale tehnicilor de clasificare 119

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 7. Arbori de decizie

7.1. Algoritmul lui Hunt 121
7.2. Specificarea testelor de atribute 122
7.3. Măsuri de omogenitate 127
7.4. Partiţionarea 130
7.5. Probleme cu atribute simbolice 131
7.6. Probleme cu atribute numerice 140
7.7. Aplicarea modelului 149
7.8. Erorile modelului 149
7.9. Câştigul proporţional 152
7.10. Alţi algoritmi de inducţie a arborilor de decizie 153
7.11. Concluzii 154

Capitolul 8. Clasificatorul bayesian naiv

8.1. Modelul teoretic 155
8.2. Probleme cu atribute simbolice 157
8.3. Considerente practice 160
8.3.1. Corecţia Laplace 160
8.3.2. Precizia calculelor 164
8.4. Probleme cu atribute numerice 164
8.5. Concluzii 167

Capitolul 9. Clasificarea bazată pe instanţe

9.1. Introducere 169
9.2. Metrici de distanţă 170
9.3. Scalarea atributelor 172
9.4. Calculul distanţelor pentru diferitele tipuri de atribute 173
9.5. Numărul optim de vecini 173
9.6. Blestemul dimensionalităţii 177
9.7. Ponderarea instanţelor 177

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

9.8. Ponderarea şi selecţia atributelor 178
9.9. Exemplu de clasificare 181
9.10. Concluzii 186

Referinţe 187

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Partea I

Raţionament probabilistic

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 1

Probabilităţi şi paradoxuri

1.1. Interpretări ale probabilităţilor

1.1.1. Interpretarea frecventistă

Mai întâi, vom menţiona unele aspecte legate de natura probabilităţilor, interesante şi din punct de vedere filosofic.

O definiţie des întâlnită este următoarea: *probabilitatea* unui eveniment *A* reprezintă fracţiunea de lumi posibile în care *A* este adevărat (figura 1.1). Ca în teoria universurilor paralele, se consideră că se pot întâmpla *toate* posibilităţile, dar la un moment dat numai într-o fracţiune din „lumile posibile" respective se întâmplă un anumit eveniment.

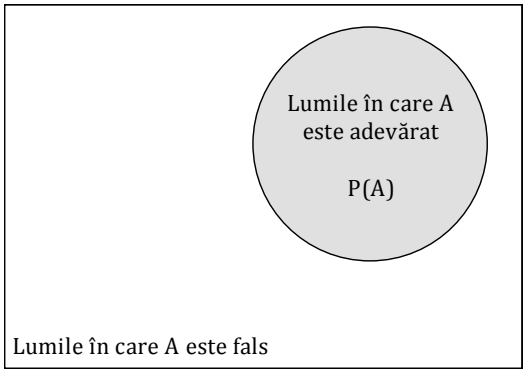


Figura 1.1. *Ilustrarea interpretării frecventiste*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Această definiție este legată de *interpretarea frecventistă*, care se reduce de fapt la organizarea unui experiment şi la numărare: numărăm cazurile în care evenimentul este adevărat.

Dacă vrem să aflăm care este probabilitatea să se defecteze un calculator, numărăm câte calculatoare s-au defectat din numărul total de calculatoare şi împărțim cele două valori.

Interpretarea frecventistă postulează că probabilitatea unui eveniment este frecvența sa relativă în timp, adică frecvența relativă de apariție după repetarea procesului de un număr mare de ori în condiții similare. Evenimentele se consideră guvernate de unele fenomene fizice aleatorii, fie fenomene predictibile în principiu, dacă am dispune de suficiente informații, fie fenomene impredictibile prin natura lor esențială.

Aruncarea unui zar sau învârtirea ruletei sunt exemple de fenomene predictibile în principiu, pe când descompunerea radioactivă este un exemplu de fenomen impredictibil. Descompunerea radioactivă este procesul prin care nucleul unui atom instabil pierde energie prin emiterea de radiație ionizantă. Emisia este spontană iar atomul se descompune fără alte interacțiuni fizice cu alte particule din afara sa. Descompunerea radioactivă este un proces stohastic la nivelul unui singur atom; conform teoriei mecanicii cuantice, este imposibil să se prezică momentul când va avea loc aceasta. Totuşi, probabilitatea că un atom se va descompune este constantă în timp şi deci pentru un număr mare de atomi identici, rata de descompunere a ansamblului este predictibilă, pe baza constantei de descompunere (sau a perioadei de înjumătățire).

În cazul aruncării unui ban corect, interpretarea frecventistă consideră că probabilitatea de a cădea „cap” este 1/2 nu pentru că există 2 rezultate egal probabile, ci pentru că serii repetate de încercări au arătat în

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

mod empiric că frecvența converge la 1/2 când numărul de încercări tinde la infinit.

Mai formal, dacă n_a este numărul de apariții ale unui eveniment *A* după *n* încercări, atunci $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_a}{n}$.

O problemă fundamentală în definirea frecventistă a probabilităților este următoarea. Limita unui şir infinit de încercări este independentă de segmentele sale inițiale finite. Dacă un ban cade „cap" de o sută de ori la rând, asta nu spune de fapt mai nimic despre probabilitatea de a cădea „cap" când numărul de încercări tinde la infinit. Este în mod evident imposibilă repetarea de un număr infinit de ori a unui experiment pentru a-i determina probabilitatea reală. Dar dacă se efectuează doar un număr finit de încercări, pentru fiecare serie de încercări va apărea o frecvență relativă diferită, chiar dacă probabilitatea reală ar trebui să fie aceeaşi întotdeauna. Dacă putem măsura probabilitatea doar cu o anumită eroare, această eroare de măsurare poate fi exprimată doar ca o probabilitate (însuşi conceptul pe care dorim să-l definim). Prin urmare, definiția frecvenței relative devine circulară (Hájek, 2012).

1.1.2. Interpretarea fizică

Interpretarea fizică (engl. "propensity") afirmă că probabilitățile sunt nişte proprietăți ale obiectelor sau evenimentelor, predispoziții ale unui anumit tip de situații să producă anumite rezultate sau frecvențe relative pentru un număr mare de experimente. Predispozițiile nu sunt frecvențe relative, ci *cauze* ale frecvențelor relative stabile observate şi ar trebui să explice *de ce* repetarea unui experiment generează anumite rezultate cu aproximativ aceleaşi rate de apariție.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Ne putem întreba dacă probabilităţile sunt nişte caracteristici intrinseci ale obiectelor, asemănătoare cu proprietăţile lor fizice, ca masa de exemplu. Dacă la aruncarea unui ban corect probabilitatea de a cădea pe fiecare din cele două feţe este 50% (banul poate să cadă şi pe cant, dar aceasta este o problemă marginală, o excepţie cu probabilitate foarte mică), care este cauza pentru procentele de 50-50%? De ce sunt egal probabile cele două feţe? Este aceasta o proprietate a banului ca obiect? Ar putea exista o altă zonă din univers, cu alte legi ale fizicii, în care această proporţie să nu fie 50-50%?

Rezultatul unui experiment fizic este produs de o mulţime de condiţii iniţiale. Când repetăm un experiment, de fapt realizăm un alt experiment, cu condiţii iniţiale mai mult sau mai puţin similare. Un experiment determinist va avea de fapt întotdeauna o predispoziţie de 0 sau 1 pentru un anumit rezultat. De aceea, predispoziţii nebanale (diferite de 0 sau 1) există doar pentru experimente cu adevărat nedeterministe.

În această interpretare, rezultatul unui eveniment se bazează pe proprietăţile fizice obiective ale obiectului sau procesului care generează evenimentul. Rezultatul aruncării unui ban se poate considera ca fiind determinat de exemplu de proprietăţile fizice ale banului, cum ar fi forma simetrică plată şi cele două feţe.

Este greu să definim probabilităţile ca predispoziţii, pentru că (cel puţin deocamdată) nu ştim ce *sunt*, ci doar ce (bănuim că) *fac*. Însă, aşa cum magnitudinea unei sarcini electrice nu poate fi definită explicit, folosind noţiuni elementare, ci doar în măsura efectelor pe care le produce (atragerea sau respingerea altor sarcini electrice), tot astfel predispoziţia este ceea ce face ca un experiment să aibă o anumită probabilitate.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

În acest context, legea numerelor mari reflectă faptul că frecvenţele relative stabile sunt o manifestare a predispoziţiilor, adică a probabilităţilor invariante singulare (care se referă la evenimentul considerat în sine, nu la seria de încercări repetate). Pe lângă explicarea apariţiei frecvenţelor relative stabile, ideea de predispoziţie este motivată de dorinţa de a înţelege probabilităţile singulare din mecanica cuantică, precum probabilitatea de descompunere a unui atom la un anumit moment (Hájek, 2012).

1.1.3. Interpretarea subiectivistă

Interpretarea frecventistă şi cea fizică se mai numesc „obiectiviste", deoarece presupun probabilităţile ca fiind componente ale lumii fizice. Discuţia despre probabilităţile obiective are sens doar în contextul unor experimente aleatorii bine definite.

Interpretarea subiectivistă sau bayesiană consideră că probabilitatea unui eveniment este o măsură a convingerii subiective, personale, că evenimentul va avea loc.

Probabilităţi subiectiviste pot fi atribuite oricărei propoziţii, chiar şi atunci când nu este implicat niciun proces aleatoriu. Ele reprezintă gradul în care propoziţia este sprijinită de evidenţele disponibile. În general, aceste probabilităţi sunt considerate grade de încredere, care arată cât de siguri suntem că propoziţia respectivă este adevărată.

Principiul indiferenţei afirmă că atunci când există $n > 1$ posibilităţi mutual exclusive (distincte) şi exhaustive colectiv (care acoperă toate posibilităţile), indistinctibile cu excepţia denumirilor lor, fiecărei posibilităţi trebuie să i se atribuie o probabilitate egală cu $1 / n$ (Keynes, 1921).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Un ban simetric are două fețe, denumite arbitrar „cap” şi „pajură”. Presupunând că banul va cădea pe o față sau pe alta, rezultatele aruncării banului sunt mutual exclusive, exhaustive şi interschimbabile, dacă ignorăm evenimentul mai puțin probabil de a ateriza pe cant, deoarece acest rezultat nu este interschimbabil cu celelalte două. Conform principiului, fiecărei fețe i se atribuie probabilitatea de 1/2.

În această analiză se presupune că forțele care acționează asupra banului nu sunt cunoscute. Dacă le-am cunoaşte cu precizie, am putea prezice traiectoria banului conform legilor mecanicii clasice.

Interpretarea subiectivistă permite raționamentul cu propoziții a căror valoare de adevăr este incertă. Pentru a evalua probabilitatea unei ipoteze, trebuie specificate unele probabilități a-priori, care sunt actualizate apoi în lumina datelor relevante noi care apar.

În abordarea subiectivistă, probabilitatea măsoară o convingere personală, unei ipoteze i se atribuie o probabilitate, pe când în abordarea frecventistă, ipoteza este testată fără a i se atribui o probabilitate inițială.

Abordările obiectiviste sunt nepractice pentru cele mai multe probleme de decizie din lumea reală. În abordarea frecventistă, este necesar ca un proces să aibă o natură repetitivă pentru a-i putea fi măsurată probabilitatea. Aruncarea unui ban este un astfel de proces, însă incertitudinile privind un război nuclear de exemplu nu pot fi tratate astfel. Nu au existat războaie nucleare până acum şi mai mult, repetarea lor este greu de imaginat. Pentru un astfel de proces complex care presupune analiza circumstanțelor care conduc la un război nuclear, este greu de realizat o estimare bazată pe considerente obiective (Lee, 1989).

Abordarea subiectivistă permite combinarea naturală a frecvențelor cu judecățile experților. Probabilitățile numerice pot fi extrase din baze de

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

date, pot fi estimate de către experţi sau pot fi o combinaţie între cele două variante.

1.1.4. Probabilităţile în lumea cuantică

Dezvoltând discuţia în domeniul mecanicii cuantice, putem considera extensia modelului de probabilităţi unidimensional, din lumea macroscopică, în care probabilităţile sunt numere reale pozitive şi pentru o distribuţie suma tuturor probabilităţilor este 1, la un model bidimensional, în care avem aşa-numitele *amplitudini de probabilitate*.

Amplitudinea de probabilitate este un număr complex al cărui modul ridicat la pătrat reprezintă o probabilitate. De exemplu, dacă amplitudinea de probabilitate a unei stări cuantice este $\alpha = \gamma + i\delta$, atunci probabilitatea de a măsura acea stare este $|\alpha|^2 = \gamma^2 + \delta^2$.

Dacă o particulă elementară poate avea 2 stări, notate $|0\rangle$ şi $|1\rangle$, atunci ea poate fi simultan într-o *superpoziţie* a acestor stări: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, unde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Dacă particula este observată, vom detecta starea $|0\rangle$ cu probabilitatea $|\alpha|^2$ şi starea $|1\rangle$ cu probabilitatea $|\beta|^2$. De asemenea, starea particulei „colapsează” în starea observată, ori $|0\rangle$ ori $|1\rangle$.

Două experimente tipice pun în evidenţă comportamentul total diferit al elementelor mecanicii cuantice faţă de cele ale mecanicii clasice.

Primul presupune trimiterea de fotoni sau electroni perpendicular spre un perete, prin două fante care au mărimea şi distanţa dintre ele comparabile cu lungimea de undă a particulelor incidente. Chiar dacă doar o singură particulă elementară este emisă la un moment dat, pe perete apare un model de interferenţă, ca şi cum fiecare particulă ar trece simultan prin

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

ambele fante şi ar interfera cu ea însăşi, după cum se poate vedea în figura 1.2 (BlackLight Power, 2005).

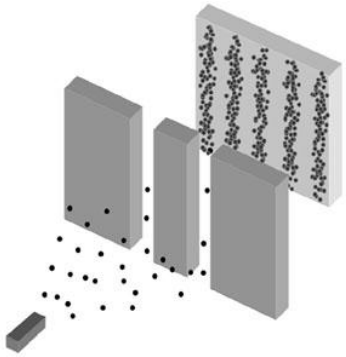


Figura 1.2. *Comportamentul de tip undă*

Dacă în dreptul fantelor se pune un detector, astfel încât să se determine exact prin ce fantă trece particula, rezultatul de pe perete apare ca două aglomerări distincte în dreptul fiecărei fante, fără modelul de interferență, ca în figura 1.3 (BlackLight Power, 2005). Prin acțiunea de observare, starea particulelor cuantice colapsează din superpoziție într-o stare „clasică".

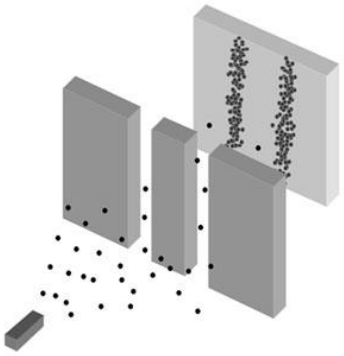


Figura 1.3. *Comportamentul de tip particulă*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

În primul caz, particulele elementare se comportă ca nişte unde, iar în al doilea caz se comportă ca nişte particule. Este ca şi cum rezultatul ar depinde de scopul măsurătorii, dacă dorim să detectăm particule sau unde.

Un alt experiment interesant care pune în evidenţă caracterul cuantic al particulelor elementare este interferometrul Mach-Zehnder (Harrison, 2008), prezentat în figura 1.4.

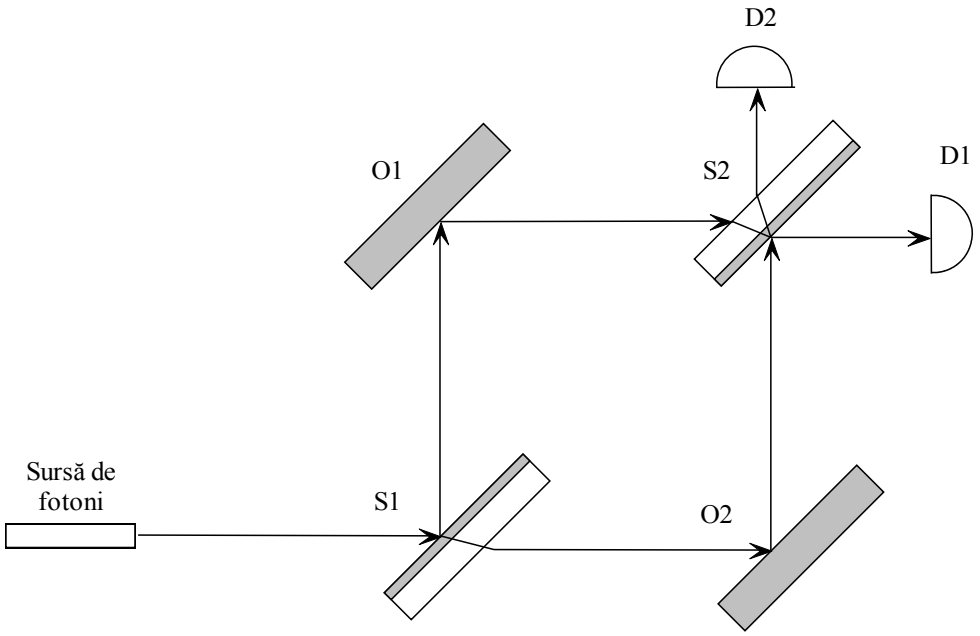


Figura 1.4. *Interferometrul Mach-Zehnder*

Acesta este un dispozitiv utilizat în general pentru a măsura interferenţa clasică. Este compus dintr-o sursă de fotoni, două oglinzi normale, O1şi O2, două oglinzi semitransparente S1 şi S2 şi două detectoare de particule D1 şi D2. O oglindă semi-transparentă reflectă jumătate din lumina primită şi refractă cealaltă jumătate prin ea.

La fiecare reflectare, fotonii îşi schimbă faza cu o jumătate de lungime de undă. Schimbări de fază au loc şi la traversarea materialului

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

oglinzilor semitransparente. Ideea de bază este că schimbările de fază pentru ambele căi („sus” şi „dreapta”) sunt egale în cazul detectorului D1 şi prin urmare apare o interferență constructivă. În cazul detectorului D2, fotonii venind de pe cele două căi prezintă o diferență de fază de o jumătate de lungime de undă, ceea ce determină o interferență destructivă completă. În cazul clasic, toată lumina ajunge la detectorul D1 şi deloc la detectorul D2.

În cazul cuantic, un foton traversează singur sistemul, însă apare acelaşi rezultat, ca şi cum ar parcurge simultan cele două căi posibile şi ar interfera cu el însuşi.

Dacă am dori să observăm exact calea pe care merge fotonul, eliminând de exemplu oglinda S2 (figura 1.5), rezultatele devin cele clasice, jumătate din fotoni fiind detectați de către D1 şi jumătate de către D2.

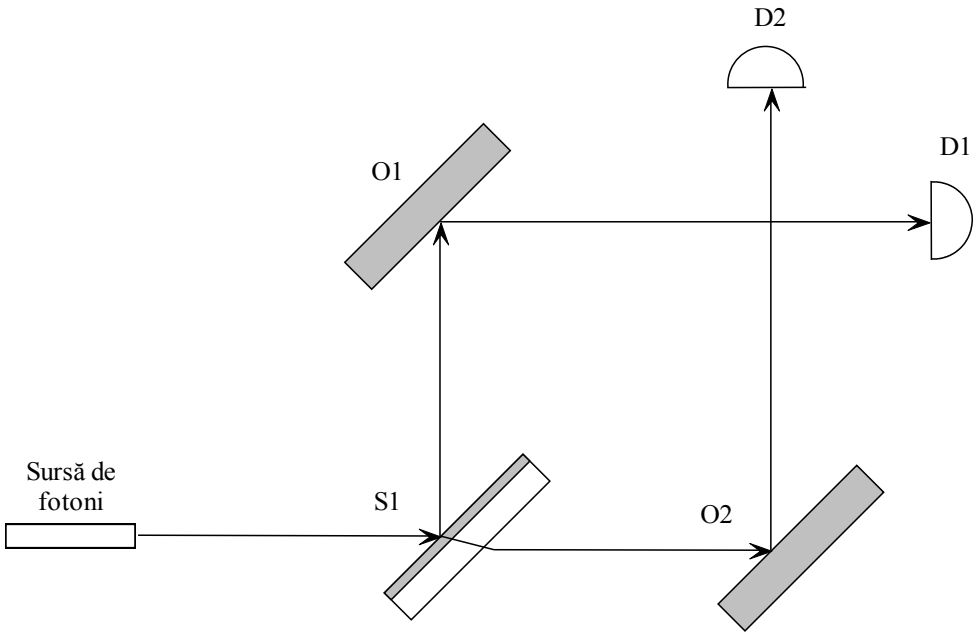


Figura 1.5. *Configuraţia pentru observarea căii fotonului*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Calculul cuantic este o direcție promițătoare de cercetare care încearcă să utilizeze fenomenele cuantice precum superpoziția (remarcată în experimentele anterioare prin faptul că particula elementară traversează simultan două căi) pentru a creşte performanţele algoritmilor.

Unitatea de bază pentru informația cuantică este *qubit*-ul (engl. "quantum bit"), un sistem cuantic care poate avea 2 stări. Prelucrarea datelor se face aplicând aşa numitele *porți cuantice*, care transformă starea sistemului. Din punct de vedere matematic, aceste transformări sunt reprezentate ca nişte matrice cu care se înmulțesc de obicei amplitudinile de probabilitate pentru a lua noi valori.

Să considerăm următorul exemplu (Aaronson, 2006), în care un qubit este inițial în starea $|0\rangle$, adică amplitudinea de probabilitate corespunzătoare stării $|0\rangle$ este 1 iar cea corespunzătoare stării $|1\rangle$ este 0. Vom mai considera transformarea dată de următoarea poartă cuantică, al cărei effect este rotirea unui vector cu 45º în sens antiorar (trigonometric):

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Prin aplicarea acestei transformări, qubit-ul va ajunge într-o superpoziție:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

în care, dacă qubit-ul este observat, stările $|0\rangle$ şi $|1\rangle$ au probabilități egale de apariție, 1/2. Operația este echivalentă aruncării unui ban.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Dacă însă mai aplicăm o dată aceeaşi transformare pentru starea rezultată, vom avea:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

ceea ce corespunde unei stări deterministe de |1⟩.

Este ca şi cum am da cu banul o dată şi apoi, fără a vedea ce rezultat am obținut, mai aruncăm banul o dată şi obținem un rezultat determinist.

Şi în acest caz avem de-a face cu un fenomen de interferență, după cum putem vedea în figura 1.6 (Aaronson, 2006). Există două căi care conduc în starea |0⟩, însă una din căi are o amplitudine pozitivă şi cealaltă are o amplitudine negativă. Prin urmare, aceste amplitudini interferează destructiv şi se anulează. Pe de altă parte, căile care conduc în starea |1⟩ au ambele amplitudini pozitive şi acestea interferează constructiv.

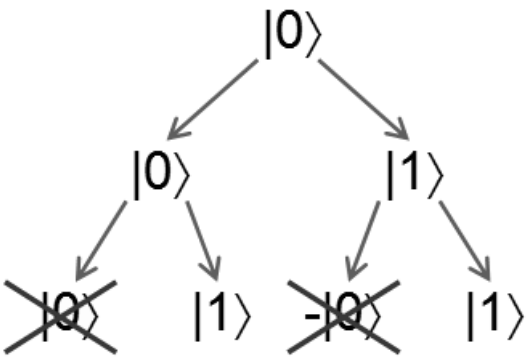


Figura 1.6. *Interferenţa amplitudinilor de probabilitate*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Acest tip de interferenţă nu se observă în lumea clasică deoarece probabilităţile nu pot fi negative. Anularea dintre amplitudinile pozitive şi negative este unul din principalele aspecte care fac mecanica cuantică diferită de mecanica clasică.

Una din ideile de bază ale calculului cuantic este tocmai folosirea superpoziţiilor şi aplicarea unor transformări astfel încât rezultatele nedorite să se anuleze şi, când sistemul este observat, să colapseze cu probabilitate cât mai mare într-o stare corespunzătoare rezultatului dorit.

Faptul că observarea unui sistem cuantic conduce la modificarea sa ridică numeroase probleme filosofice legate de rolul factorului conştient în modelarea realităţii. Putem influenţa evenimentele aleatorii, schimbându-le probabilităţile?

În termodinamică, toate particulele au o mişcare browniană aleatorie, însă dacă ne ridicăm la un nivel superior, se pot observa comportamente deterministe. Şi în cazul oamenilor, interacţiunile acestora pot fi considerate aleatorii (deterministe sau nu, sunt oricum atât de complexe încât sunt probabil imposibil de modelat), însă din punct de vedere statistic se poate vedea cum evoluează o societate. Referindu-ne la modificarea probabilităţilor unor evenimente, noi suntem la nivelul microscopic, însă ar fi interesant dacă ne-am putea ridica la un nivel superior pentru a putea observa sau modifica sistemul.

Programul *Princeton Engineering Anomalies Research* (PEAR, 2010) a încercat între anii 1979-2007 un studiu experimental extins asupra interacţiunilor dintre conştiinţa umană şi anumite dispozitive, multe bazate pe procese aleatorii, pentru a stabili măsura în care mintea poate influenţa realitatea fizică. După 28 de ani de investigaţii şi mii de experimente cu milioane de încercări, rezultatul (controversat) a fost că, în medie, mintea

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

umană poate modifica 2-3 evenimente din 10000, dincolo de variațiile statistice normale.

1.2. Paradoxuri

Modul cum percep oamenii probabilitățile nu este perfect corect, întrucât nu există o capacitate înnăscută de a lucra cu acestea. La fel ca şi în cazul logicii, oamenii au nevoie de un anumit antrenament pentru a înțelege toate subtilitățile raționamentelor probabilistice. Vom prezenta în cele ce urmează câteva paradoxuri, situații care conduc la concluzii neintuitive, dar care se dovedesc corecte în urma unei analize mai profunde.

1.2.1. Problema „Monty-Hall”

Problema „Monty-Hall” a fost popularizată în Statele Unite de o emisiune a canalului CBS din 1963. Problema este însă mai veche, fiind cunoscută într-o altă variantă încă de pe vasele cu zbaturi de pe Mississippi.

Concurentul este pus în fața a trei uşi, după cum se poate vedea în figura 1.7. În spatele a două uşi este câte o capră iar în spatele unei uşi este o maşină. Scopul jocului este desigur câştigarea maşinii. Jucătorul va câştiga ce se află în spatele uşii alese. Participantul trebuie să aleagă o uşă. Apoi, prezentatorul îi deschide o altă uşă, din celelalte două rămase, în spatele căreia este o capră. Apoi îl întreabă dacă vrea sau nu să îşi schimbe alegerea inițială către uşa a treia.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

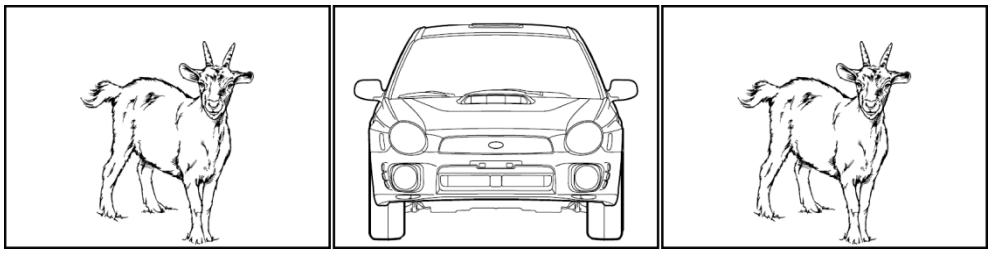


Figura 1.7. *Problema „Monty-Hall”*

Multe persoane consideră că probabilitatea inițială de câştig este 1/3 iar dacă s-a deschis o uşă, probabilitatea devine acum 1/2, indiferent de uşa aleasă. Având în vedere orgoliul propriu, faptul că inițial au ales ceva şi nu vor să-şi schimbe alegerea, probabilitățile părând oricum egale, ele au tentația de a nu-şi schimba decizia.

Se poate vedea însă din figura 1.8 că prin schimbarea uşii, participantul are de două ori mai multe şanse de câştig. Intuitiv, prin faptul că prezentatorul i-a arătat o capră, i-a dat o informație, ceea ce schimbă probabilitățile. Uşa inițială a rămas cu probabilitatea de câştig de 1/3, cea anterioară, dar faptul că i-a fost arătată o capră a transformat probabilitatea celelalte uşi în 2/3.

Să presupunem că jocul ar avea 100 de uşi şi prezentatorul i-ar fi deschis 98. Este clar că probabilitatea uşii inițiale este de 1/100, iar restul până la 1 corespunde acum celeilalte uşi.

Analizând toate deciziile posibile, dacă participantul a ales inițial maşina şi îşi schimbă decizia, va pierde. Acesta este cazul defavorabil. În celelalte două situații însă, strategia de schimbare a deciziei este câştigătoare. Se vede că păstrarea alegerii inițiale are probabilitatea de câştig de 1/3 iar schimbarea are probabilitatea de câştig de 2/3.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

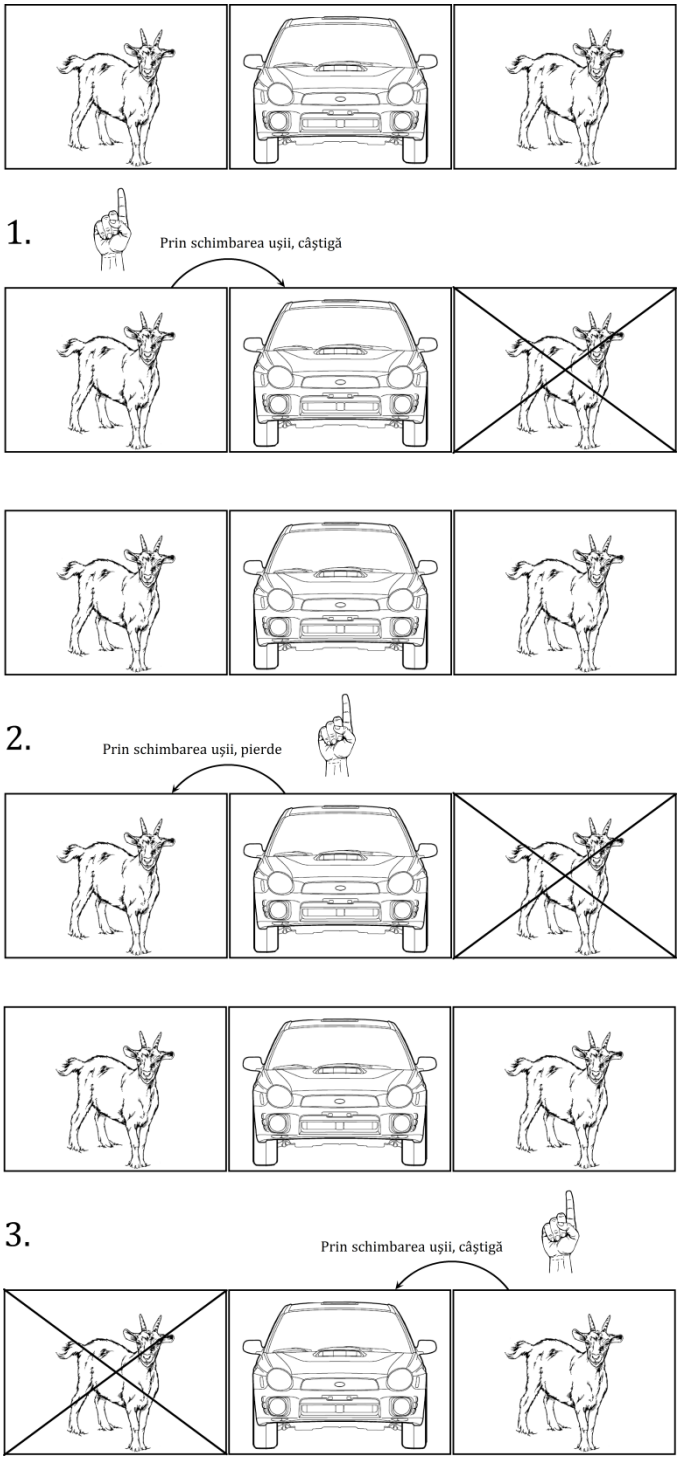


Figura 1.8. *Situaţiile posibile pentru problema „Monty-Hall”*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

1.2.2. Paradoxul cutiei lui Bertrand

Paradoxul cutiei lui Bertrand este echivalent din punct de vedere logic cu problema „Monty-Hall". Există trei cutii al căror conținut nu este vizibil. Una conține două monede de aur, una conține două monede de argint iar a treia conține o monedă de aur şi una de argint. După ce se alege o cutie în mod aleatoriu şi se scoate o monedă, dacă aceasta este de aur, s-ar părea că probabilitatea ca moneda rămasă să fie tot de aur este de 1/2. De fapt, probabilitatea este de 2/3.

1.2.3. Eroarea jucătorului de ruletă

Un alt paradox este eroarea jucătorului de ruletă (engl. "gambler's fallacy"). Culorile roşu şi negru au fiecare probabilitatea de apariție de 1/2. Să presupunem că a ieşit roşu de mai multe ori la rând. Eroarea este de a considera că, data următoare, negrul are mai multe şanse de apariție.

De fapt, fiecare experiment (acționare a ruletei) este independent. Prin urmare, de fiecare dată, roşul şi negrul au aceleaşi probabilități de apariție. În 1913, la Monte Carlo, negrul a ieşit de 26 de ori la rând. Aceasta înseamnă că există o probabilitate foarte mică ca o culoare să iasă şi de 100 de ori la rând, dar nu este imposibil. Toate aceste experimente succesive cu acelaşi rezultat, combinate, au o probabilitate foarte mică, însă fiecare experiment luat individual are aceleaşi probabilități.

1.2.4. Eroarea procurorului

Eroarea procurorului (engl. "prosecutor's fallacy") apare în situații

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

precum următoarea. Să considerăm că a fost prins un suspect de crimă, căruia i se fac analize de sânge pentru a fi comparate cu probele de la locul faptei. Grupa de sânge găsită la faţa locului este o grupă rară, AB cu Rh negativ, care are 1% frecvenţă în populaţie. De asemenea, s-au mai găsit urme de păr blond, persoanele blonde constituind tot 1% din populaţie. Suspectul are grupa de sânge respectivă şi este blond, prezenţa împreună a acestor trăsături având împreună probabilitatea de 0,01%. Prin urmare, probele ar indica faptul că suspectul este vinovat cu o probabilitate de 99,99%. Dacă însă oraşul în care s-a petrecut crima are o populaţie de 100.000 de locuitori, înseamnă că, statistic, alţi 10 oameni au aceleaşi trăsături şi deci, probabilitatea suspectului de a fi vinovat este acum de doar 10%. Probabilitatea vinovăţiei a scăzut de la 99,99% la 10% doar luând în calcul această informaţie suplimentară.

Înseamnă că aceste probe sunt inutile? Nu, ele contează dacă sunt combinate cu alte probe, de exemplu o cameră video care identifică suspectul cu o probabilitate de 70%. În acest caz, probabilităţile de a fi nevinovat se înmulţesc: $0,1 \cdot 0,3 = 0,03$ şi suspectul apare ca vinovat cu probabilitatea de 97%.

1.2.5. Paradoxul lui Simpson

Paradoxul lui Simpson (1951) nu se referă la probabilităţile elementare, ci la prelucrarea statistică a datelor. În general, se consideră că atunci când mulţimea de date este mai mare, concluziile trase sunt mai sigure, o consecinţă a legii numerelor mari din abordarea frecventistă a probabilităţilor. Paradoxul lui Simpson pare să infirme această euristică, demonstrând că este necesară foarte multă atenţie atunci când mulţimi de

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

date mici se combină într-o mulţime de date mai mare. Uneori concluziile mulţimii mari sunt opuse concluziilor mulţimilor mici şi în acest caz, de multe ori concluziile mulţimii mari sunt de fapt greşite.

Să considerăm un doctor care propune un tratament nou pentru o anumită afecţiune şi doreşte să îl compare cu un tratament standard din punct de vedere al timpului necesar pentru vindecare (scenariul este adaptat după un exemplu prezentat de Ooi, 2004). Cele două tipuri de tratament sunt aplicate unor bolnavi, iar rezultatele totale sunt prezentate în tabelul de mai jos. Pentru fiecare tratament şi pentru fiecare rezultat, se indică numărul de pacienţi aflaţi în situaţia respectivă.

Rezultat (timp de vindecare)	**Tratament**	
	Standard	**Nou**
Lung	2725 (55%)	3625 (80%)
Scurt	2275 (45%)	875 (20%)
Total	5000 (100%)	4500 (100%)

Din aceste date se poate trage concluzia că tratamentul nou pare clar inferior celui standard. 80% din pacienţii supuşi tratamentului nou au avut un timp lung de vindecare, comparativ cu 55% din pacienţii supuşi tratamentului standard. De asemenea, doar 20% din pacienţii supuşi tratamentului nou au avut un timp scurt de vindecare, comparativ cu 45% din pacienţii care au primit tratamentul standard.

Să luăm acum în calcul următoarea informaţie: doctorul a făcut experimentul asupra unor bolnavi din Iaşi şi respectiv din Bacău, în număr aproximativ egal. Însă doctorul, locuind în Iaşi, a avut mai mulţi pacienţi din acest oraş supuşi noului tratament. Cei mai mulţi pacienţi din Bacău au primit tratamentul standard. Rezultatele detaliate sunt prezentate în tabelul următor.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Rezultat (timp de vindecare)	Tratament pentru pacienţii din Iaşi		Tratament pentru pacienţii din Bacău	
	Standard	Nou	Standard	Nou
Lung	475 (95%)	3600 (90%)	2250 (50%)	25 (5%)
Scurt	25 (5%)	400 (10%)	2250 (50%)	475 (95%)
Total	500 (100%)	4000 (100%)	4500 (100%)	500 (100%)

Se vede aici că pentru bolnavii din Iaşi tratamentul nou este mai bun: 90% față de 95% au avut un timp lung de vindecare şi 10% față de 5% au avut un timp mai scurt de vindecare. O situație asemănătoare apare pentru bolnavii din Bacău: doar 5% față de 50% au avut un timp lung de vindecare şi 95% față de 50% au avut un timp mai scurt de vindecare.

Practic, atunci când considerăm individual submulțimile de bolnavi din Iaşi şi Bacău, tratamentul nou pare mai bun. Când considerăm mulțimea totală de bolnavi, tratamentul nou pare inferior celui standard.

Acest lucru ar fi echivalent cu următoarea situație. Dacă trebuie să recomandăm un tratament unui bolnav, fără să cunoaştem din ce oraş provine, îi vom recomanda tratamentul standard. Dacă ştim din ce oraş provine, îi vom recomanda tratamentul nou. Însă cunoaşterea sau nu a oraşului nu ar trebui să aibă nicio influență asupra deciziei privind tratamentul.

Paradoxul este cauzat de combinarea unor grupuri inegale. În exemplul de mai sus, pacienții din Iaşi care au primit tratamentul standard sunt de 8 ori mai puțini decât cei care au primit tratamentul nou, iar pacienții din Bacău care au primit tratamentul nou sunt de 9 ori mai puțini decât cei care au primit tratamentul standard.

Soluția este proiectarea experimentelor astfel încât să nu se combine mulțimi de date de dimensiuni inegale, provenind din surse diferite (Rogers, 2001).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 2

Fundamente teoretice

2.1. Probabilităţi condiţionate. Teorema lui Bayes

Vom aminti acum câteva noţiuni legate de probabilităţile condiţionate. Când trebuie să definim $P(A|B)$, presupunem că se cunoaşte B şi se calculează probabilitatea lui A în această situaţie. Adaptând un exemplu al lui Moore (2001), să considerăm evenimentul D (durere de cap) şi să presupunem că are, în general, o probabilitate de 1/10. Probabilitatea de a avea gripă (evenimentul G) este de numai 1/40. După cum se vede în figura 2.1, dacă cineva are gripă, probabilitatea de a avea şi dureri de cap este de 1/2. Deci probabilitatea durerii de cap, dată fiind gripa, este de 1/2. Această probabilitate corespunde intersecţiei celor două regiuni, cu aria egală cu jumătate din G.

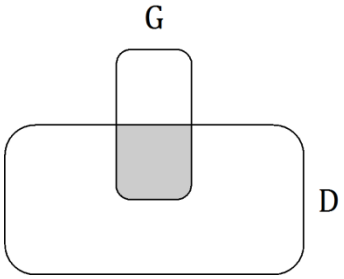


Figura 2.1. *Reprezentare grafică a unei probabilităţi condiţionate*

Pe baza acestei relaţii rezultă *teorema lui Bayes* (1763), care este importantă pentru toate raţionamentele probabilistice pe care le vom studia.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Considerăm formula probabilităţilor condiţionate:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.1}$$

Putem exprima probabilitatea intersecţiei în două moduri şi de aici deducem expresia lui $P(B|A)$ în funcţie de $P(A|B)$:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B), \tag{2.2}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A), \tag{2.3}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}. \tag{2.4}$$

Această ecuaţie reprezintă un rezultat fundamental. Mai clar, putem considera următoarea expresie alternativă:

$$P(I|E) = \frac{P(E|I) \cdot P(I)}{P(E)}, \tag{2.5}$$

unde I este ipoteza, E este evidenţa (provenind din datele observate), $P(I)$ este *probabilitatea a-priori* a ipotezei, adică gradul iniţial de încredere în ipoteză, $P(E|I)$ este *verosimilitatea* datelor observate (engl. "likelihood"), adică măsura în care s-a observat evidenţa în condiţiile îndeplinirii ipotezei, iar $P(I|E)$ este *probabilitatea a-posteriori* a ipotezei, dată fiind evidenţa.

Relaţia este importantă deoarece putem calcula astfel probabilităţile cauzelor, date fiind efectele. Este mai simplu de cunoscut când o cauză

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

determină un efect, dar invers, când cunoaştem un efect, probabilităţile cauzelor nu pot fi cunoscute imediat. Teorema ne ajută să diagnosticăm o anumită situaţie sau să testăm o ipoteză.

În ecuaţia 2.4, se poate elimina $P(B)$ folosind *regula probabilităţii totale* (engl. "law of total probability"). $P(B)$ va fi exprimat astfel:

$$P(B) = \sum_j P\left(B\middle|A_j\right)P(A_j). \tag{2.6}$$

Expresia poate fi înţeleasă mai uşor observând situaţia din figura 2.2.

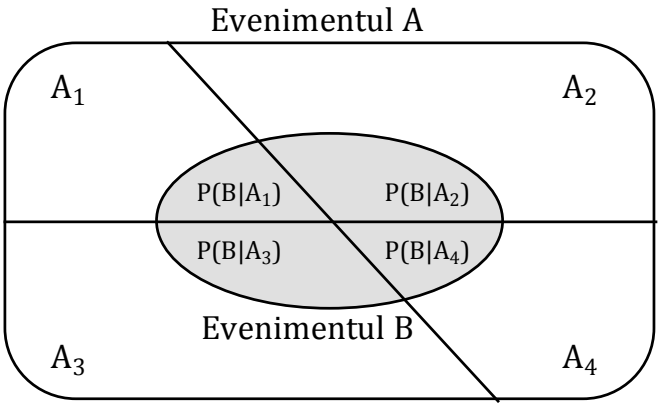


Figura 2.2. *Reprezentare grafică a legii probabilităţii totale*

Probabilitatea fiecărei valori A_i a lui A, condiţionată de B, este:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P\left(B\middle|A_j\right)P(A_j)}. \tag{2.7}$$

Să considerăm următorul exemplu de diagnosticare. Ştim că probabilitatea de apariţie a meningitei în populaţia generală este

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$P(M) = 0{,}002\%$. De asemenea, probabilitatea ca o persoană să aibă gâtul înțepenit este $P(G) = 5\%$. Mai ştim că meningita cauzează gât înțepenit în jumătate din cazuri: $P(G|M) = 50\%$.

Dorim să aflăm următorul lucru: dacă un pacient are gâtul înțepenit, care este probabilitatea să aibă meningită?

Aplicând teorema lui Bayes, vom avea:

$$P(M|G) = \frac{P(G|M) \cdot P(M)}{P(G)} = 0{,}02\%.$$

G este un simptom pentru M. Dacă există simptomul, care este probabilitatea unei posibile cauze, adică $P(M)$? Rezultatul este 0,02%, deci o probabilitate mică, deoarece probabilitatea meningitei înseşi este foarte mică în general.

Acest rezultat este important la diagnosticarea bolilor rare. Testele au şi ele o marjă de eroare, foarte mică, dar ea există. Aceasta, coroborată cu probabilitatea mică a bolii, nu conduce automat la concluzia că persoana are boala respectivă, chiar dacă testul iese pozitiv.

În exemplul următor, B reprezintă boala, iar T reprezintă rezultatul pozitiv al testului. Să presupunem că:

$$P(B) = 0{,}01$$
$$P(T|B) = 0{,}99$$
$$P(T|\neg B) = 0{,}02.$$

Conform expresiei 2.7, putem calcula probabilitatea bolii dacă testul a ieşit pozitiv:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(B|T) = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T)} = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|\neg B) \cdot P(\neg B)} = 0{,}33$$

Prin urmare, chiar dacă testul iese pozitiv, probabilitatea de a avea boala este de doar 33%. În general, trebuie evitată greşeala de a considera că $P(A|B) = P(B|A)$. Se poate vedea chiar din exemplul anterior că $P(B|T) \neq P(T|B)$.

2.2. Independenţă şi independenţă condiţionată

Vom prezenta în continuare câteva exemple în care vom explica noțiunile de *independență* şi *independență condiționată*.

Să presupunem că Ion şi Maria dau cu banul. Ion dă cu un ban şi Maria dă cu alt ban. Aceste evenimente nu se influențează în niciun fel. Dacă Ion dă cu banul, acest lucru nu aduce nicio informație asupra rezultatului acțiunii Mariei. În acest caz, evenimentele sunt independente, deoarece rezultatul unui experiment nu influențează celălalt experiment.

În cazul în care dau cu acelaşi ban, dacă Ion dă de 100 de ori şi iese de 70 de ori pajură, ceea ce înseamnă că banul nu este corect, acest rezultat dă informații asupra experimentului Mariei. Dacă Maria va da cu banul de 100 de ori, probabil rezultatul va fi similar. Cele două evenimente nu mai sunt independente.

În schimb, dacă un expert analizează banul şi constată că este măsluit, atunci experimentul lui Ion (70% pajură) nu mai aduce nicio informație asupra experimentului Mariei (tot 70% pajură). Rezultatul se poate prevedea datorită analizei expertului. Experimentele lui Ion şi al

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Mariei devin independente dată fiind noua evidență, a faptului că banul este măsluit.

Fie variabila A rezultatul experimentului lui Ion şi B rezultatul experimentului Mariei. Fie C variabila „banul este influențat în favoarea pajurei". În ultimul exemplu, se spune că A şi B sunt independente condițional, dat fiind C.

În unele situații, independența condițională poate fi uşor confundată cu independența. Se presupune că evenimentele sunt independente, când de fapt sunt doar independente condițional.

De exemplu, Ion şi Maria locuiesc în zone diferite ale oraşului şi vin la serviciu cu tramvaiul, respectiv cu maşina. Se poate considera că dacă întârzie unul din ei, nu se poate spune nimic despre întârzierea celuilalt, sunt evenimente independente. Dar să presupunem că la un moment dat aflăm că vatmanii sunt în grevă. Ion întârzie deoarece nu merg tramvaiele. Însă datorită grevei, probabil traficul auto creşte, ceea ce o afectează pe Maria. Astfel, întârzierea lui Ion nu mai este independentă de întârzierea Mariei. Ele sunt independente condițional, dat fiind evenimentul grevei vatmanilor, care este cauza lor comună.

Să mai considerăm cazul în care o răceală poate detemina o persoană să strănute, dar şi o alergie poate determina acelaşi lucru. În general, dacă nu ştim că persoana a strănutat, răceala şi alergia sunt evenimente independente. Dacă ştim însă că persoana strănută, aceste evenimente nu mai sunt independente. De exemplu, dacă mai ştim că persoana este răcită, probabil că răceala determină strănutul şi deci probabilitatea de a avea şi alergie se reduce. Informații suplimentare privind răceala modifică probabilitatea alergiei.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

2.3. Reţele bayesiene

În continuare, ne vom concentra asupra reprezentării informațiilor legate de evenimente probabilistice, care ne va ajuta să realizăm eficient raționamente.

Determinarea probabilității unei combinații de valori se poate realiza astfel:

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1) \cdot P(x_{n-1}, \dots, x_1). \tag{2.8}$$

Aplicând în continuare această regulă vom obține *regula de înmulțire a probabilităților* (engl. "chain rule"):

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1) \cdot P(x_{n-1} | x_{n-2}, \dots, x_1) \cdot P(x_2 | x_1) \cdot P(x_1), \tag{2.9}$$

exprimată mai concis astfel:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1). \tag{2.10}$$

O rețea bayesiană arată ca în figura 2.3: este un graf orientat aciclic (engl. "directed acyclic graph"), în care evenimentele sau variabilele se reprezintă ca noduri, iar relațiile de corelație sau cauzalitate se reprezintă sub forma arcelor dintre noduri.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

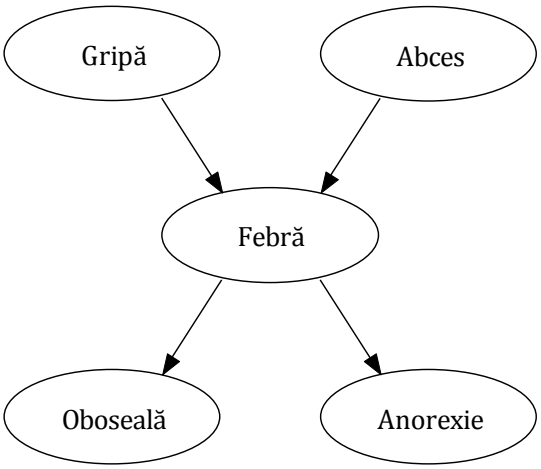


Figura 2.3. *Reţea bayesiană*

În acest exemplu, se consideră că atât gripa cât şi abcesul pot determina febra. De asemenea, febra poate cauza o stare de oboseală sau lipsa poftei de mâncare (anorexie).

Sensul săgeților arcelor sunt dinspre părinți, cum ar fi gripa şi abcesul, înspre fii, precum febra. Deşi în acest exemplu relațiile sunt cauzale, în general o rețea bayesiană reflectă relații de corelație, adică măsura în care aflarea unor informații despre o variabilă-părinte aduce noi informații despre o variabilă-fiu.

Condiția ca o rețea bayesiană să fie un graf orientat aciclic înseamnă că arcele pot forma bucle, dar nu pot forma cicluri, după cum se vede în figura 2.4.

Având în vedere că determinarea probabilităților nodurilor presupune de fapt înmulțiri şi adunări în care sunt implicați părinții variabilelor, dacă rețeaua ar permite cicluri, acest lucru ar conduce la repetarea la infinit a unor calcule.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

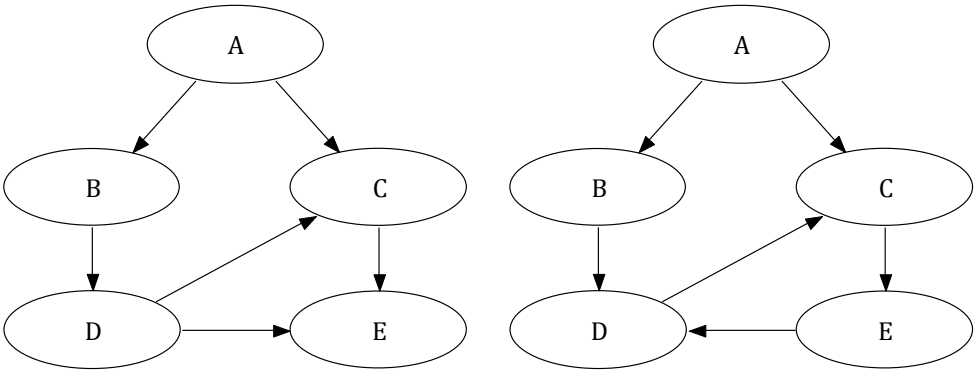


Figura 2.4. *a) Reţea bayesiană validă; b) Reţea bayesiană invalidă*

Fiecare variabilă are o mulţime de valori. În cazul cel mai simplu, variabilele au valori binare, de exemplu *Da* şi *Nu*. În general însă, o variabilă poate avea oricâte valori.

Tabelul 2.1. *Tabelele de probabilităţi pentru reţeaua bayesiană*

P(*Gripă = Da*)	*P*(*Gripă = Nu*)
0,1	0,9

P(*Abces = Da*)	*P*(*Abces = Nu*)
0,05	0,95

Gripă	*Abces*	*P*(*Febră = Da*)	*P*(*Febră = Nu*)
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

Febră	*P*(*Obosealã = Da*)	*P*(*Obosealã = Nu*)
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

Febră	*P*(*Anorexie = Da*)	*P*(*Anorexie = Nu*)
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Asociate cu variabilele, o rețea bayesiană conține o serie de tabele de probabilități, precum cele din tabelul 2.1. Pentru nodurile fără părinți se indică probabilitățile marginale ale fiecărei valori (adică fără a lua în considerare valorile celorlalte variabile). Pentru celelalte noduri, se indică probabilitățile condiționate pentru fiecare valoare, ținând cont de fiecare combinație de valori ale variabilelor părinte.

În general, o variabilă binară fără părinți va avea un singur parametru independent, o variabilă cu 1 părinte va avea 2 parametri independenți iar o variabilă cu n părinți va avea 2^n parametri independenți în tabela de probabilități corespunzătoare.

Presupunerea modelului bazat pe rețele bayesiene este că o variabilă nu depinde decât de părinții săi şi deci ecuația 2.10 devine:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\pi(x_i)), \tag{2.11}$$

unde $\pi(x_i)$ reprezintă mulțimea părinților variabilei x_i, din şirul ordonat al nodurilor în care părinții unui nod apar întotdeauna înaintea nodului respectiv. Modul în care se poate determina acest şir va fi tratat în secțiunea 2.5 referitoare la sortarea topologică.

Dacă avem n variabile binare, distribuția comună de probabilitate conține câte o probabilitate pentru toate 2^n combinații. Însă întrucât suma probabilităților este 1, ultima combinație nu mai este independentă de celelalte şi poate fi dedusă ca 1 minus suma celorlalte. Distribuția comună este deci specificată de $2^n - 1$ parametri.

După cum se vede în tabelele de probabilități din tabelul 2.1, pentru exemplul din figura 2.3 cu 5 variabile sunt necesari numai 10 parametri față

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

de $2^5 - 1 = 31$. Toate variabilele fiind binare, pentru o anumită combinație de valori a părinților, probabilitatea unei valori a unui fiu este 1 minus probabilitatea celeilalte valori, de exemplu:

$$P(Oboseală = Da) = 1 - P(Oboseală = Nu).$$

Într-o rețea bayesiană, în loc să calculăm probabilitățile tuturor elementelor din distribuția comună de probabilitate, considerăm numai probabilitățile condiționate de părinți.

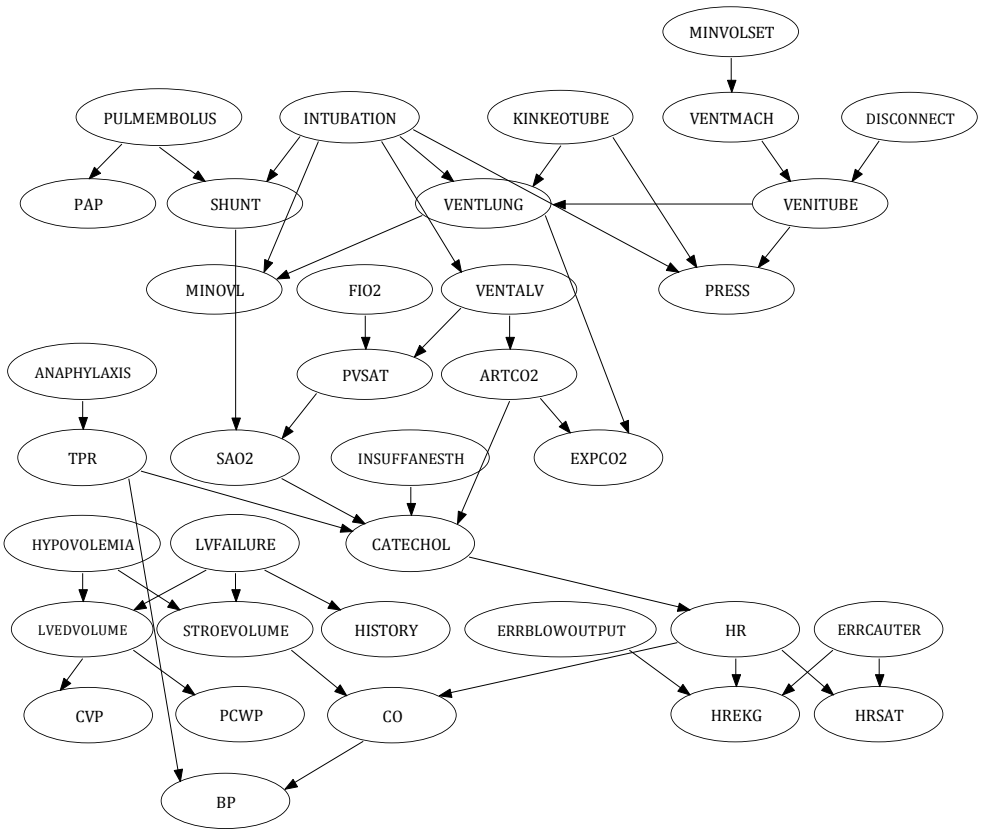


Figura 2.5. *Rețea bayesiană complexă*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Un alt exemplu privind un sistem de monitorizare a pacienților la terapie intensivă (Russell & Norvig, 2002) cu 37 de variabile, prezentat în figura 2.5, surprinde reducerea clară a numărului de parametri de la $2^{37} - 1 \approx 10^{11}$ la 509.

Reducerea complexității calculelor de probabilități este unul din scopurile principale ale rețelelor bayesiene.

2.4. Algoritmul Bayes-Ball

Pe baza structurii unei rețele bayesiene, putem determina şi relațiile de independență sau independență condiționată dintre noduri.

În exemplele din secțiunea 2.2, am menționat două situații în care se poate preciza relația de independență între evenimente, în prezența sau lipsa unor evidențe. Putem relua acum aceste situații în reprezentarea grafică a rețelor bayesiene.

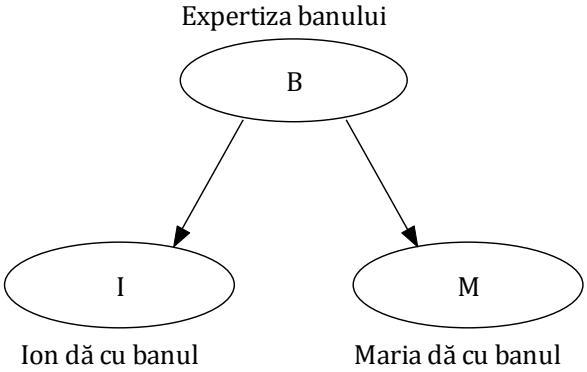


Figura 2.6. *Cauză comună*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

În figura 2.6 este prezentat scenariul *cauzei comune*. Dacă lipsesc alte evidențe, I şi M nu sunt independente, deoarece au o cauză comună ascunsă. Dacă se cunoaşte însă B, ele devin independente.

Formal, putem scrie că:

$P(I|M) \neq P(I)$, notat şi $I \not\perp\!\!\!\perp M$

$P(I|M,B) = P(I|B)$, notat şi $I \perp\!\!\!\perp M|B$

În figura 2.7 este prezentat scenariul *revocării prin explicare* (engl. "explaining away"). R şi A sunt independente în lipsa altor evidențe. Dacă se cunoaşte însă S, ele nu mai sunt independente.

Formal, putem scrie că:

$P(R|A) = P(R)$, notat şi $R \perp\!\!\!\perp A$

$P(R|A,S) \neq P(R|S)$, notat şi $R \not\perp\!\!\!\perp A|S$

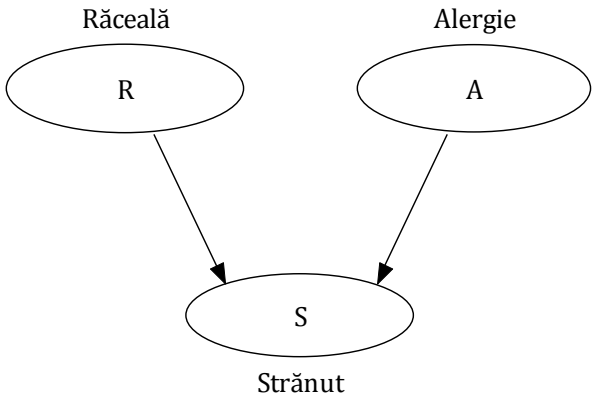


Figura 2.7. *Revocare prin explicare*

O modalitate simplă pentru a deduce relațiile de independență şi independență condiționată între noduri este propusă de *algoritmul Bayes-Ball* (Shachter, 1998), care prin analogie cu jocul de baseball, presupune trimiterea unei mingi în rețea, care poate trece mai departe sau poate fi

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

blocată de anumite noduri. Dacă mingea nu poate ajunge de la un nod A la un nod B, atunci aceste noduri sunt independente.

Regulile de mişcare a mingii prin reţea iau în calcul direcţiile arcelor (dacă mingea vine de la un părinte la un fiu sau invers), precum şi tipurile de noduri: neobservate sau observate (de evidenţă). În figura 2.8 (Paskin, 2003), săgeţile normale arată faptul că mingea trece mai departe, iar barele perpendiculare pe capetele săgeţilor indică faptul că mingea este blocată.

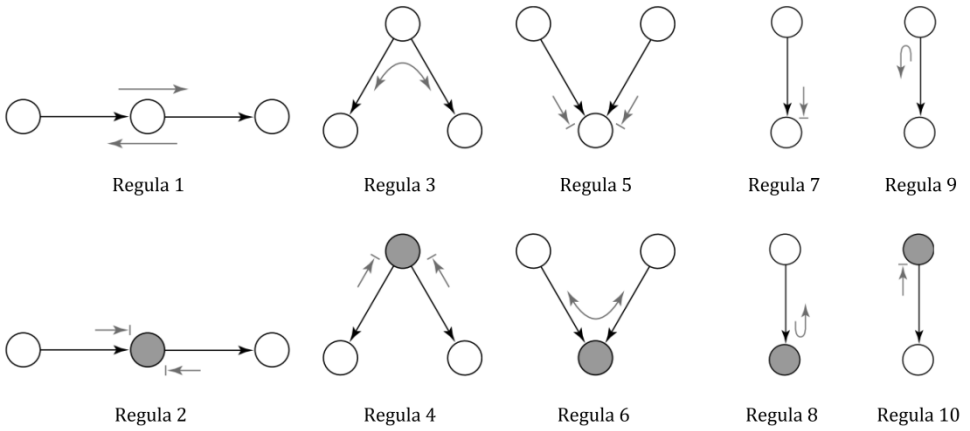


Figura 2.8. *Regulile de traversare a reţelei ale algoritmului Bayes-Ball*

Nodurile neobservate sunt marcate cu alb, iar cele de evidenţă sunt marcate cu gri. Algoritmul poate determina dacă nodul A este independent sau nu de nodul B date fiind nodurile C_1, C_2 etc. În acest caz, nodurile C_i sunt marcate cu gri. Mingea pleacă din nodul A şi parcurge reţeaua, ajungând sau nu la B. Dacă nu ajunge, atunci $A \perp\!\!\!\perp B \mid C_i$. Dacă ajunge, atunci $A \not\perp\!\!\!\perp B \mid C_i$.

Nodurile pe care le atinge mingea sunt dependente condiţional iar nodurile care nu sunt atinse de minge sunt independente condiţional de nodul de start.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Regula 1 specifică relațiile de dependență condițională între „bunici", părinți şi fii. Dacă părintele este observat (regula 2), „bunicul" devine independent condițional de fiu. Am putea aminti aici presupunea Markov: viitorul şi trecutul sunt independente condițional dat fiind prezentul.

Pentru regula 3, un nod părinte pentru doi fii, dacă nodul este neobservat, fiii sunt dependenți deoarece au o cauză comună ascunsă, aşa că mingea trece. Dacă nodul este observat (regula 4), fiii devin independenți condițional, aşa că mingea va fi blocată.

Pentru regula 5, un nod cu doi părinți, dacă nodul este neobservat, atunci părinții săi sunt independenți iar mingea nu trece. Dacă nodul este observat (regula 6), părinții devin dependenți iar mingea trece datorită revocării prin explicare.

Regulile 7-10 tratează cazurile în care mingea ajunge la un nod terminal, unde este ori blocată (7, 10), ori reflectată înapoi (8, 9).

Pentru a reține mai uşor regulile 3-10, putem face următoarea convenție. Numim noduri „albe" nodurile neobservate şi „negre" nodurile de evidență. De asemenea, numim capetele săgeților „albe" dacă niciun arc nu este incident în acel nod (de exemplu arcele care pleacă din nodurile de sus în regulile 3-10) şi „negre" dacă arcele sunt incidente în acel nod (arcele care intră în nodurile de jos în regulile 3-10). Regula generală este simplă: dacă nodurile şi arcele au aceeaşi culoare, mingea trece sau este reflectată. Dacă au culori diferite, mingea este blocată.

Pentru a exemplifica, vom considera rețeaua bayesiană din figura 2.9, pe baza căreia vom răspunde la o serie de interogări privind independența şi independența condiționată a nodurilor cu ajutorul algoritmului Bayes-Ball.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

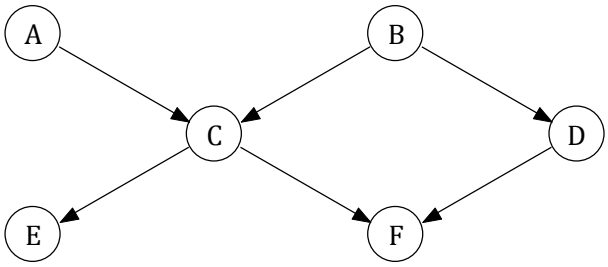
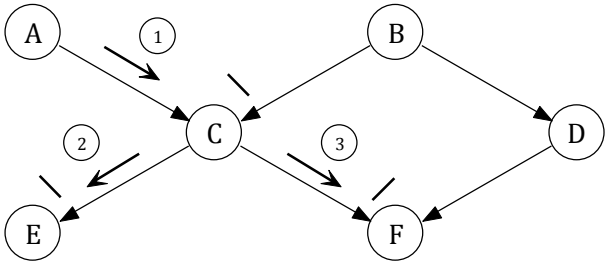


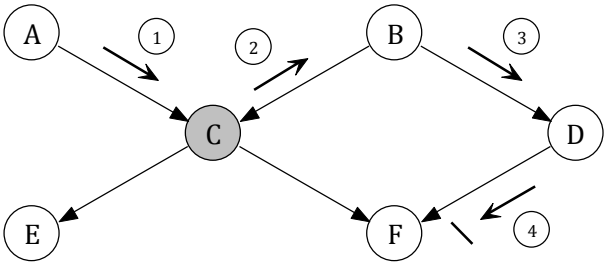
Figura 2.9. *Reţea bayesiană pentru exemplificarea algoritmului Bayes-Ball*

Mai întâi, să determinăm dacă *A* este independent de *D*. S-au notat încercuite numerele etapelor de aplicare a algoritmului şi sensul de trimitere a mingii pe arcele reţelei. Se vede în figura de mai jos că mingea nu ajunge la *D* şi prin urmare răspunsul la întrebare este afirmativ.

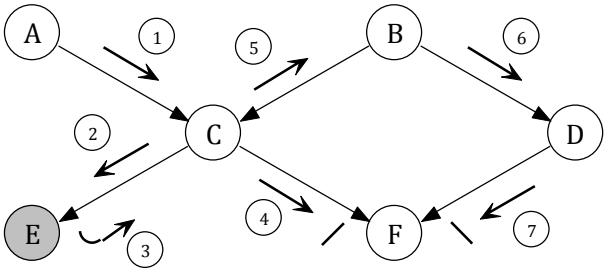


Următoarea interogare este dacă *A* este independent de *D* dat fiind *C*. În figura următoare, se observă nodul evidenţă *C* marcat cu gri. Întrucât mingea ajunge de la *A* la *D*, răspunsul este în acest caz negativ.

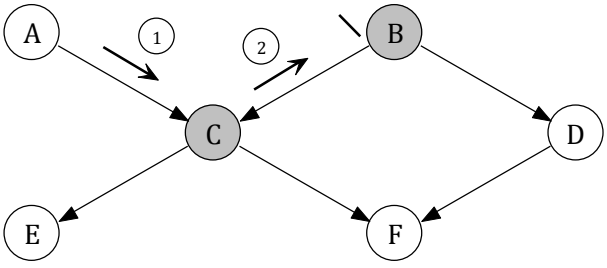
Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com



Dorim să aflăm în continuare dacă *A* este independent de *D* dat fiind *E*. Aplicând algoritmul ca în figura următoare, răspunsul este negativ.

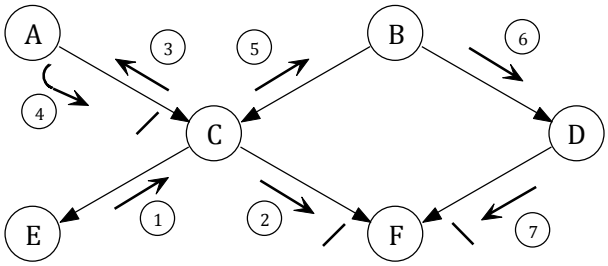


În continuare, vom răspunde dacă *A* este independent de *D* dați fiind *B* şi *C*. Conform rezolvării din figura de mai jos, de data aceasta este rezultatul este afirmativ.

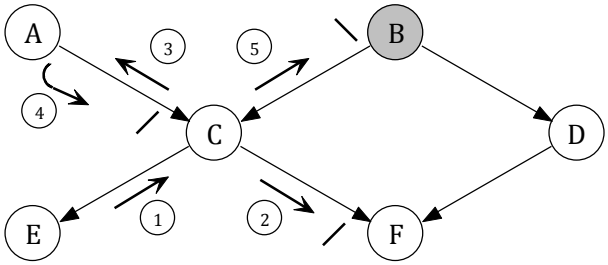


Schimbând nodul de start, dorim să ştim dacă *E* este independent de *D*. Răspunsul este negativ, după cum se poate observa din figura următoare.

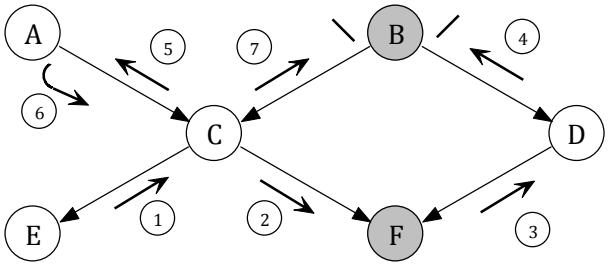
Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com



Pentru interogarea privind independența lui *E* față de *D*, dat fiind *B*, răspunsul este afirmativ.



În fine, pentru interogarea privind independența lui *E* față de *D*, dați fiind *B* şi *F*, răspunsul este negativ.



Trebuie menționat faptul că mingea poate merge în direcția opusă arcului din graf. Un arc poate fi parcurs de două ori în direcții opuse.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Însă un arc poate fi parcurs doar o singură dată într-o anumită direcție. De aceea, în scopul implementării, pentru a evita parcurgerea de mai multe ori a arcelor, nodurile evidență sunt marcate ca vizitate când mingea ajunge la ele iar celelalte noduri primesc un marcaj „sus" (engl. "top") când trimit mingea părinților şi un marcaj „jos" (engl "bottom") când trimit mingea copiilor. De exemplu, un nod marcat „sus" nu mai poate trimite mingea din nou părinților.

2.5. Sortarea topologică

Sortarea sau ordonarea topologică a unui graf este o ordonare liniară a nodurilor sale astfel încât, pentru fiecare arc $A \rightarrow B$, A apare înaintea lui B. Pentru o rețea bayesiană, sortarea topologică asigură faptul că nodurile părinte vor apărea înaintea nodurilor fiu. Orice graf orientat aciclic, cum este o rețea bayesiană, are cel puțin o ordonare topologică.

Algoritmii corespunzători au de obicei o complexitate de timp liniară în numărul de noduri n şi de arce a: $O(n + a)$.

Pentru exemplificare, vom considera algoritmul propus de Kahn (1962), care este mai uşor de înțeles, nefiind recursiv. Pseudocodul este următorul:

```
L ← listă iniţial vidă care va conţine elementele sortate
S ← mulţimea nodurilor fără părinţi

cât-timp S nu este vidă
   scoate un nod n din S
   introdu n în L
   pentru-fiecare nod m cu un arc e de la n la m
      scoate arcul e din graf
```


Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

```
      dacă m nu are alte arce incidente atunci
        introdu m în S
      sfârşit-dacă
   sfârşit-pentru-fiecare
sfârşit-cât-timp

dacă graful mai are arce atunci
   întoarce eroare (graful are cel puţin un ciclu)
altfel
   întoarce L (elementele sortate topologic)
sfârşit-dacă
```

Dacă graful este orientat aciclic, soluția se va găsi în lista *L*. Dacă nu, algoritmul detectează faptul că există cicluri în graf şi sortarea topologică este imposibilă. Lista *S* poate fi implementată ca o coadă sau ca o stivă. În funcție de ordinea nodurilor extrase din *S*, se pot crea soluții diferite.

Pentru exemplificare, vom considera graful din figura 2.10.

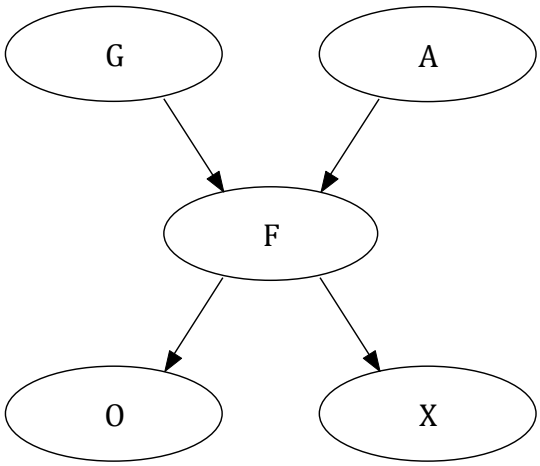


Figura 2.10. *Graf simplu pentru sortare topologică*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Paşii de execuție ai algoritmului sunt următorii:

1. $L = \emptyset$, $S = \{G, A\}$
2. $L = \{G\}$, $S = \{A\}$
3. se elimină arcul GF, F nu poate fi adăugat în S pentru că mai există arcul AF
4. $L = \{G, A\}$, $S = \emptyset$
5. se elimină arcul AF, $S = \{F\}$
6. $L = \{G, A, F\}$, $S = \emptyset$
7. se elimină arcul FO, $S = \{O\}$
8. se elimină arcul FX, $S = \{O, X\}$
9. $L = \{G, A, F, O\}$, $S = \{X\}$
10. $L = \{G, A, F, O, X\}$, $S = \emptyset$

Soluția este deci: $\{G, A, F, O, X\}$.

Să considerăm şi un exemplu puțin mai complex, prezentat în figura 2.11.

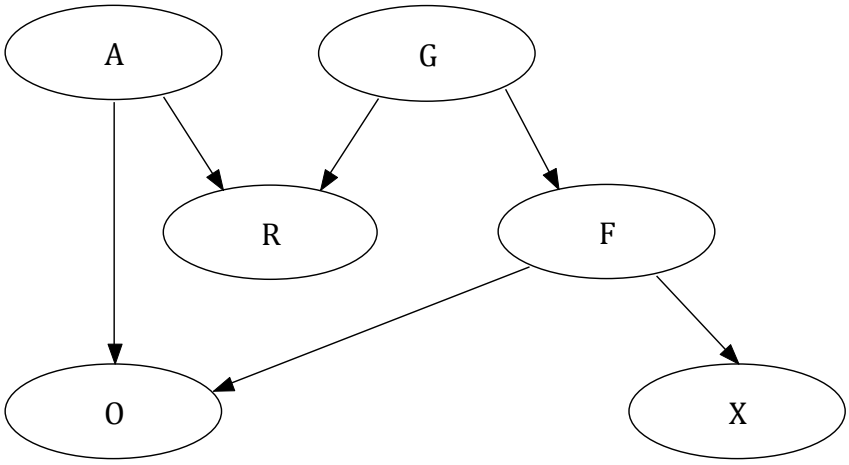


Figura 2.11. *Graf mai complex pentru sortare topologică*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

În acest caz, paşii de execuţie ai algoritmului sunt următorii:

1. $L = \emptyset$, $S = \{A, G\}$
2. $L = \{A\}$, $S = \{G\}$
3. se elimină arcul AR
3. se elimină arcul AO
4. $L = \{A, G\}$, $S = \emptyset$
5. se elimină arcul GR, $S = \{R\}$
3. se elimină arcul GF, $S = \{R, F\}$
4. $L = \{A, G, R\}$, $S = \{F\}$
4. $L = \{A, G, R, F\}$, $S = \emptyset$
5. se elimină arcul FO, $S = \{O\}$
3. se elimină arcul FX, $S = \{O, X\}$
4. $L = \{A, G, R, F, O\}$, $S = \{O\}$
4. $L = \{A, G, R, F, O, X\}$, $S = \emptyset$

Soluţia este: $\{A, G, R, F, O, X\}$.

2.6. Construcţia automată a reţelelor bayesiene

Pe măsură ce complexitatea modelelor creşte, o problemă importantă este construirea reţelelor bayesiene în mod automat, doar pe baza datelor existente. Putem identifica aici două tipuri de probleme:

- determinarea parametrilor direct din date;
- determinarea structurii optime direct din date.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Dacă structura de noduri şi arce este cunoscută, determinarea parametrilor direct din date presupune estimarea probabilităților condiționate ale fiecărui nod în funcție de părinți, ca frecvențe relative de apariție a valorilor în cadrul datelor eşantionate disponibile.

Determinarea automată a structurii optime este mult mai dificilă. Dacă nu se cunosc relațiile de cauzalitate sau de corelație între variabile, teoretic, nodurile ar putea fi introduse în rețea în orice ordine. Pentru aceleaşi evenimente, pot exista mai multe rețele echivalente. În momentul în care este introdus un nod nou, se actualizează relațiile cu nodurile existente pentru crearea arcelor. În cazul cel mai defavorabil, în care nodurile sunt considerate într-o ordine nefericită, o rețea bayesiană devine echivalentă din punct de vedere al numărului de parametri cu distribuția comună de probabilitate.

Un exemplu în acest sens poate fi observat în figura 2.12 (adaptată după Russell & Norvig, 2002), în care ordinea în care se introduc nodurile rețelei din figura 2.3 este de sus în jos: *Oboseală*, *Anorexie*, *Abces*, *Gripă*, *Febră*, iar arcele sunt create pentru a respecta relațiile de corelație.

Desigur, nu se mai respectă relațiile cauzale logice, dar dacă luăm evenimentele în această ordine, ele nu sunt independente.

Dacă primul nod introdus în rețea este *Oboseala*, şi următorul este *Anorexia*, trebuie adăugat un arc între cele două, deoarece informațiile despre primul afectează informațiile despre al doilea. *Anorexia* nu este cauzată de *Oboseală*, dar în lipsa altor informații, valorile lor sunt corelate datorită cauzei comune. Acelaşi tip de raționament se aplică pentru celelalte noduri introduse în rețea. În final, aceasta necesită 31 de parametri, la fel ca distribuția comună de probabilitate.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

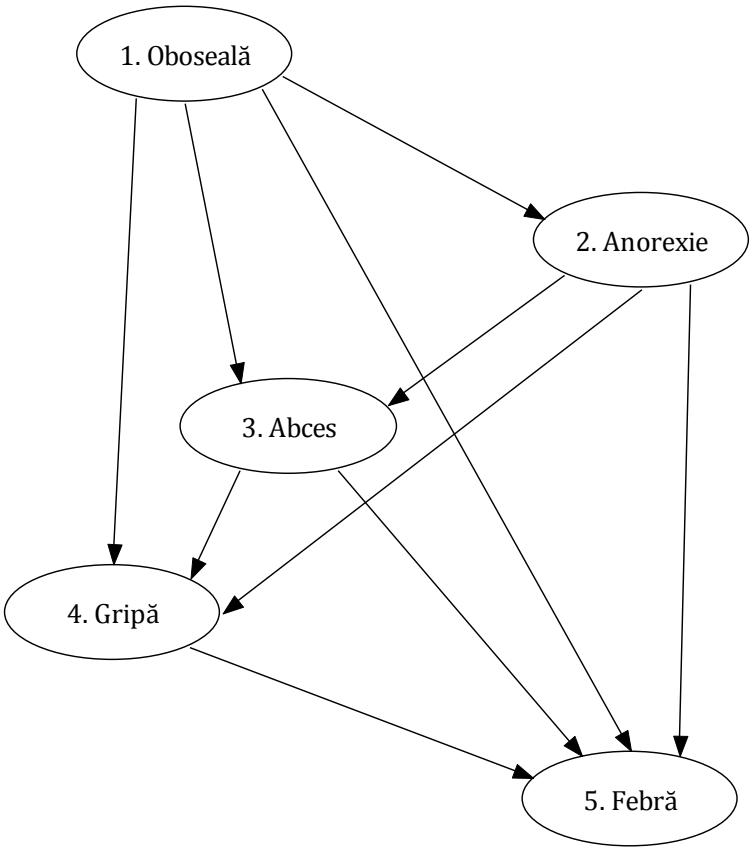


Figura 2.12. *Cazul cel mai defavorabil pentru structura unei reţele bayesiane*

Din cauza acestor dificultăți, de multe ori se preferă o abordare hibridă, în care structura rețelei este definită de un expert uman, care analizează pe cât posibil relațiile cauzale dintre evenimente, iar parametrii sunt mai apoi estimați în mod automat din date.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 3

Raţionamente exacte

3.1. Calculul probabilităţii unei observaţii

În acest capitol vom prezenta, pe baza mai multor exemple, o serie de calcule şi raționamente care permit prelucrarea informațiile stocate într-o rețea bayesiană.

Vom considera aceeaşi rețea din capitolul 2. Pentru a fi mai uşor de urmărit, redăm şi aici structura (figura 3.1) şi tabelele de probabilități (tabelul 3.1).

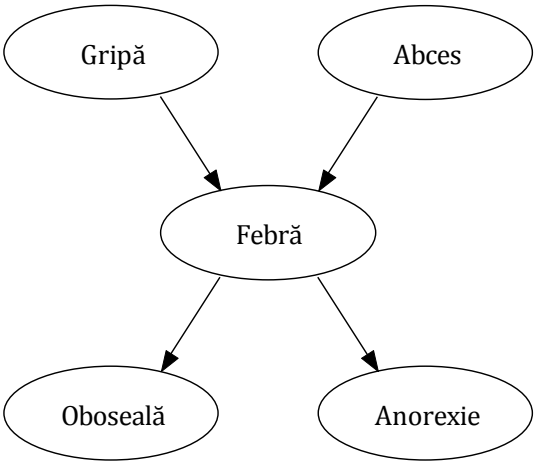


Figura 3.1. *Reţea bayesiană cu 5 noduri şi 4 arce*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Tabelul 3.1. *Tabelele de probabilităţi pentru reţeaua bayesiană*

P(*Gripă = Da*)	*P*(*Gripă = Nu*)
0,1	0,9

P(*Abces = Da*)	*P*(*Abces = Nu*)
0,05	0,95

Gripă	*Abces*	*P*(*Febră = Da*)	*P*(*Febră = Nu*)
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

Febră	*P*(*Oboseală = Da*)	*P*(*Oboseală = Nu*)
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

Febră	*P*(*Anorexie = Da*)	*P*(*Anorexie = Nu*)
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9

Un prim tip de calcul este determinarea probabilităţii unei observaţii, în cazul în care sunt cunoscute valorile tuturor nodurilor din reţea.

De exemplu, să presupunem situaţia în care o persoană are febră, dar nu are gripă, abces, oboseală şi anorexie. Pentru simplitate, vom nota nodurile cu *F*, *G*, *A*, *O* şi *X*, respectiv,. De asemenea, vom nota cu *D* şi *N* ca indici valorile *Da* şi *Nu*. Dacă variabila *Febră* are valoarea *Da*, vom nota acest fapt cu F_D. Dacă variabila *Abces* are valoarea *Nu*, vom nota acest fapt cu A_N.

Pentru situaţia de mai sus, trebuie să calculăm probabilitatea $P(F_D, G_N, A_N, O_N, X_N)$. Conform ecuaţiei 2.11, descompunem această probabilitate într-un produs de probabilităţi condiţionate în care factorii sunt probabilităţile tuturor nodurilor, condiţionate de părinţi:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(F_D, G_N, A_N, O_N, X_N) =$$
$$P(F_D|G_N, A_N) \cdot P(G_N) \cdot P(A_N) \cdot P(O_N|F_D) \cdot P(X_N|F_D) =$$
$$0{,}05 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}00855 \approx 1\%.$$

Valorile probabilităților condiționate se caută în tabelele de probabilități ale rețelei. De exemplu, valoarea lui $P(F_D|G_N, A_N)$ corespunde valorii *Da* din ultima linie a tabelei pentru *Febră*.

Rezultatul de aproximativ 1% ne spune că este puțin probabil ca o persoană să aibă febră în lipsa cauzelor şi efectelor cunoscute pentru aceasta.

3.2. Calculul probabilităţilor marginale

Într-o rețea bayesiană putem calcula şi probabilitățile marginale ale tuturor nodurilor, adică probabilitățile nodurilor în sine, care nu mai depind de părinți (în sensul probabilităților condiționate). În tabelele date, numai nodurile fără părinți au probabilități marginale, cum ar fi *Gripă* şi *Abces*. Dorim să deducem în general care sunt probabilitățile celorlalte noduri. Calculele reprezintă într-un fel o sumă a probabilităților condiționate pentru fiecare valoare, ponderate cu probabilitățile marginale de apariție a valorilor părinților.

Pentru valoarea *Da* a variabilei *Febră* vom avea:

$$P(F_D) =$$
$$P(F_D|G_D, A_D) \cdot P(G_D) \cdot P(A_D) +$$
$$P(F_D|G_D, A_N) \cdot P(G_D) \cdot P(A_N) +$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(F_D|G_N, A_D) \cdot P(G_N) \cdot P(A_D) +$$
$$P(F_D|G_N, A_N) \cdot P(G_N) \cdot P(A_N) =$$
$$0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}25 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 = 0{,}1245 \approx 12\%.$$

Având în vedere faptul că singurele valori ale variabilei *Febră* sunt *Da* şi *Nu*, probabilitatea valorii *Nu* va reprezenta restul până la 1:

$$P(F_N) = 1 - P(F_D) = 0{,}8755 \approx 88\%.$$

Acelaşi tip de calcule se realizează pentru variabila *Oboseală*:

$$P(O_D) =$$
$$P(O_D|F_D) \cdot P(F_D) + P(O_D|F_N) \cdot P(F_N) =$$
$$0{,}6 \cdot 0{,}1245 + 0{,}2 \cdot 0{,}8755 = 0{,}2498 \approx 25\%,$$
$$P(O_N) = 1 - P(O_D) = 0{,}7502 \approx 75\%.$$

şi de asemenea, pentru *Anorexie*:

$$P(X_D) =$$
$$P(X_D|F_D) \cdot P(F_D) + P(X_D|F_N) \cdot P(F_N) =$$
$$0{,}5 \cdot 0{,}1245 + 0{,}1 \cdot 0{,}8755 = 0{,}1498 \approx 15\%,$$
$$P(X_N) = 1 - P(X_D) = 0{,}8502 \approx 85\%.$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

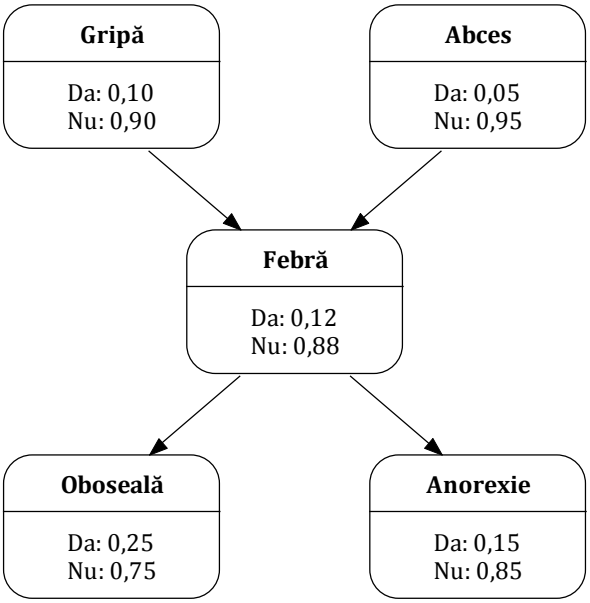


Figura 3.2. *Probabilităţile marginale ale nodurilor reţelei*

Figura 3.2 prezintă succint probabilitățile marginale pentru toate nodurile din rețea.

3.3. Inferenţa prin enumerare

Spre deosebire de calculul probabilității atunci când cunoaştem valorile tuturor variabilelor, în cazul inferenței prin enumerare dorim să răspundem la întrebări generale privind probabilitățile unor noduri, cunoscând doar valorile unora dintre noduri.

Folosind acest procedeu, putem răspunde practic la orice întrebare privind evenimentele codate în rețea. Având în vedere nişte evidențe, adică observații sau evenimente despre care ştim că s-au întâmplat, putem calcula probabilitățile tuturor celorlalte noduri din rețea.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Mai exact, scopul inferenței prin enumerare este de a calcula probabilitatea unei variabile interogate (engl. "query"), date fiind variabilele observate (evidență).

Ideea de bază este tot calcularea unui produs de probabilități condiționate, însă în cazul variabilelor despre care nu se cunoaşte nimic (nu sunt nici observate şi nici interogate), se sumează variantele corespunzătoare *tuturor* valorilor acestora.

Să considerăm următoarea întrebare: „Care este probabilitatea ca o persoană să aibă gripă, dacă prezintă simptome de oboseală şi anorexie?"

Vom calcula *independent* $P(G_D|O_D, X_D)$ şi $P(G_N|O_D, X_D)$.

Pentru $P(G_D|O_D, X_D)$, variabilele rămase sunt *Abcesul* şi *Febra*. În consecință, vom suma probabilitățile corespunzătoare tuturor valorilor acestor variabile: $a \in \{A_D, A_N\}$ şi $f \in \{F_D, F_N\}$. De asemenea, pentru a creşte eficiența calculelor, se recomandă ca variabilele rămase să fie mai întâi sortate topologic, astfel încât părinții să apară înaintea copiilor. În acest caz, se vor putea descompune mai uşor sumele, scoțând în față factorii care nu depind de o anumită variabilă.

$$P(G_D|O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{a \in \{A_D, A_N\}} \sum_{f \in \{F_D, F_N\}} P(G_D, a, f, O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{a} \sum_{f} P(G_D) \cdot P(a) \cdot P(f|G_D, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \sum_{a} P(a) \cdot \sum_{f} P(f|G_D, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \sum_{a} P(a) \cdot [P(F_D|G_D, a) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(F_N|G_D, a) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] =$$

$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_D, A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

$$P(F_N|G_D, A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] +$$

$$P(A_N) \cdot [P(F_D|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

$$P(F_N|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} =$$

$$\alpha \cdot 0{,}1 \cdot \{0{,}05 \cdot [0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1] +$$

$$0{,}95 \cdot [0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1]\} =$$

$$\alpha \cdot 0{,}02174.$$

În exemplul de mai sus, se observă că $P(a)$ nu depinde de *f* şi prin urmare, suma corespunzătoare variabilei *Abces* a fost scoasă în faţa sumei corespunzătoare variabilei *Febră*, evitându-se duplicarea unor calcule. Nodul *Abces*, neavând părinţi, este în faţa *Febrei* în sortarea topologică.

Se remarcă variabila α care intervine în expresia probabilităţii. Vom explica sensul acesteia imediat, după ce vom considera şi calculele pentru $P(G_N|O_D, X_D)$, în mod analog:

$$P(G_N|O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{a \in \{A_D, A_N\}} \sum_{f \in \{F_D, F_N\}} P(G_N, a, f, O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_N) \cdot P(a) \cdot P(f|G_N, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_N) \cdot \sum_a P(a) \cdot \sum_f P(f|G_N, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_N) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_N, A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(F_N|G_N, A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] +$$
$$P(A_N) \cdot [P(F_D|G_N, A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$
$$P(F_N|G_N, A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} =$$
$$\alpha \cdot 0{,}9 \cdot \{0{,}05 \cdot [0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1] +$$
$$0{,}95 \cdot [0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}95 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1]\} =$$
$$\alpha \cdot 0{,}03312.$$

Se ştie că $P(G_D|O_D, X_D) + P(G_N|O_D, X_D) = 1$, deoarece *Da* şi *Nu* sunt singurele valori posibile pentru *Gripă*. Având în vedere că $P(G_D|O_D, X_D) = \alpha \cdot 0{,}02174$ şi $P(G_N|O_D, X_D) = \alpha \cdot 0{,}03312$, există $\alpha = 18{,}23$, astfel încât suma celor două probabilităţi să fie 1. În consecinţă, rezultatul interogării este:

$$P(G_D|O_D, X_D) = 0{,}39628 \approx 40\%,$$
$$P(G_N|O_D, X_D) = 0{,}60372 \approx 60\%.$$

3.4. Inferenţa prin eliminarea variabilelor

Dacă urmărim cu atenţie paşii efectuaţi pentru a determina probabilităţile condiţionate prin metoda inferenţei prin enumerare, constatăm o repetare a unor calcule, evidenţiată mai jos:

$$P(G_D|O_D, X_D) =$$
$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_D, A_D) \cdot \boldsymbol{P(O_D|F_D)} \cdot \boldsymbol{P(X_D|F_D)} +$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(F_N|G_D, A_D) \cdot \boldsymbol{P(O_D|F_N)} \cdot \boldsymbol{P(X_D|F_N)}] +$$
$$P(A_N) \cdot [P(F_D|G_D, A_N) \cdot \boldsymbol{P(O_D|F_D)} \cdot \boldsymbol{P(X_D|F_D)} +$$
$$P(F_N|G_D, A_N) \cdot \boldsymbol{P(O_D|F_N)} \cdot \boldsymbol{P(X_D|F_N)}]\} =$$
$$\alpha \cdot 0{,}1 \cdot \{0{,}05 \cdot [0{,}8 \cdot \mathbf{0,6} \cdot \mathbf{0,5} + 0{,}2 \cdot \mathbf{0,2} \cdot \mathbf{0,1}] +$$
$$0{,}95 \cdot [0{,}7 \cdot \mathbf{0,6} \cdot \mathbf{0,5} + 0{,}3 \cdot \mathbf{0,2} \cdot \mathbf{0,1}]\}.$$

Calcularea unor sume parțiale şi folosirea lor directă atunci când este nevoie poate aduce o îmbunătățire semnificativă a vitezei de execuție în cazul unor rețele bayesiene complexe şi a unui număr mic de variabile observate, echivalent cu un număr mare de sume.

Metoda eliminării variabilelor se bazează pe *factorizare*. Probabilitatea fiecărei variabile reprezintă un factor:

$$P(G_D|O_D, X_D) =$$
$$\alpha \cdot \sum_{a \in \{A_D, A_N\}} \sum_{f \in \{F_D, F_N\}} P(G_D, a, f, O_D, X_D) =$$
$$\alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_D) \cdot P(a) \cdot P(f|G_D, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$
$$\alpha \cdot \underbrace{P(G_D)}_{\boldsymbol{G}} \cdot \sum_a \underbrace{P(a)}_{\boldsymbol{A}} \cdot \sum_f \underbrace{P(f|G_D, a)}_{\boldsymbol{F}} \cdot \underbrace{P(O_D|f)}_{\boldsymbol{O}} \cdot \underbrace{P(X_D|f)}_{\boldsymbol{X}}$$

Compunerea acestor factori se realizează cu o operație numită *produs punct cu punct* (engl. "pointwise product"), în care variabilele rezultatului reprezintă reuniunea variabilelor operanzilor.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

De exemplu, pentru 3 variabile *X*, *Y* şi *Z*, produsul punct cu punct al factorilor $f_1(X,Y)$ şi $f_2(Y,Z)$ este:

$$f_1(X,Y) \times f_2(Y,Z) = f_3(X,Y,Z). \tag{3.1}$$

Modul în care se calculează valorile factorului rezultat este mai uşor de înțeles pe baza exemplului din tabelul 3.2.

Tabelul 3.2. *Exemplu de factorizare*

X	*Y*	$f_1(X,Y)$	*Y*	*Z*	$f_2(Y,Z)$	*X*	*Y*	*Z*	$f_3(X,Y,Z)$
A	A	0,1	A	A	0,5	A	A	A	0,1 · 0,5
A	F	0,2	A	F	0,6	A	A	F	0,1 · 0,6
F	A	0,3	F	A	0,7	A	F	A	0,2 · 0,7
F	F	0,4	F	F	0,8	A	F	F	0,2 · 0,8
						F	A	A	0,3 · 0,5
						F	A	F	0,3 · 0,6
						F	F	A	0,4 · 0,7
						F	F	F	0,4 · 0,8

Factorul f_1 depinde de 2 variabile şi să presupunem pentru simplitate că sunt binare, cu valorile *Adevărat* (*A*) şi *Fals* (*F*). Prin urmare, factorul va avea $2^2 = 4$ valori, corespunzătoare tuturor combinațiilor de valori pentru variabile. Analog pentru factorul f_2. Valoarea factorului f_3 pentru o anumită combinație de valori ale variabilelor sale este egală cu produsul valorilor factorilor-operanzi atunci când variabilele acestora iau aceleaşi valori ca acelea din factorul-rezultat.

De exemplu:

$$f_3(X_A, Y_F, Z_A) = f_1(X_A, Y_F) \cdot f_2(Y_F, Z_A) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14,$$
$$f_3(X_F, Y_A, Z_A) = f_1(X_F, Y_A) \cdot f_2(Y_A, Z_A) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15.$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

În cele ce urmează, vom aplica metoda eliminării variabilelor pentru a răspunde la aceeaşi întrebare ca în secţiunea 3.3: „Care este probabilitatea ca o persoană să aibă gripă, dacă prezintă simptome de oboseală şi anorexie?”

Am văzut că:

$$P(G_D|O_D,X_D) = \alpha \cdot \underbrace{P(G_D)}_{\boldsymbol{G}} \cdot \sum_a \underbrace{P(a)}_{\boldsymbol{A}} \cdot \sum_f \underbrace{P(f|G_D,a)}_{\boldsymbol{F}} \cdot \underbrace{P(O_D|f)}_{\boldsymbol{O}} \cdot \underbrace{P(X_D|f)}_{\boldsymbol{X}}$$

Mai întâi, vom calcula factorii corespunzători variabilelor, utilizând probabilităţile condiţionate din tabelele de probabilităţi.

Calculele se fac de la dreapta la stânga, variabilele fiind sortate topologic, de la stânga la dreapta. Aici, sortarea topologică a variabilelor este: { *Gripă*, *Abces*, *Febră*, *Oboseală*, *Anorexie* }.

Pentru variabilele *Anorexie*, respectiv *Oboseală*, factorii au valorile date de probabilităţile condiţionate, depinzând de părintele lor, *Febra*:

F	$f_X(F)$
D	0,5
N	0,1

=

F	$P(X\|F)$
D	0,5
N	0,1

F	$f_O(F)$
D	0,6
N	0,2

=

F	$P(O\|F)$
D	0,6
N	0,2

Compunem acum aceste două variabile, rezultând factorul f_{OX}, care depinde şi el (numai) de *Febră*:

$$f_{OX}(F) = f_O(F) \times f_X(F).$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

F	$f_{OX}(F)$
D	0,6 · 0,5 = 0,3
N	0,2 · 0,1 = 0,02

=

F	$f_O(F)$
D	0,6
N	0,2

×

F	$f_X(F)$
D	0,5
N	0,1

În continuare, calculăm factorul f_{FOX}, prin compunerea factorului f_{OX} cu factorul corespunzător *Febrei*, următoarea variabilă de la dreapta spre stânga. *Febra* depinde de *Gripă* şi *Abces*, prin urmare:

$$f_{FOX}(F, G, A) = f_F(F, G, A) \times f_{OX}(F).$$

F	G	A	$f_{FOX}(F,G,A)$
D	D	D	0,8 · 0,3 = 0,24
D	D	N	0,7 · 0,3 = 0,21
D	N	D	0,25 · 0,3 = 0,075
D	N	N	0,05 · 0,3 = 0,015
N	D	D	0,2 · 0,02 = 0,004
N	D	N	0,3 · 0,02 = 0,006
N	N	D	0,75 · 0,02 = 0,015
N	N	N	0,95 · 0,02 = 0,019

=

F	G	A	$P(F\|G,A)$
D	D	D	0,8
D	D	N	0,7
D	N	D	0,25
D	N	N	0,05
N	D	D	0,2
N	D	N	0,3
N	N	D	0,75
N	N	N	0,95

×

F	$f_{OX}(F)$
D	0,3
N	0,02

În acest moment, am ajuns la suma după valorile variabilei *Febră*. Pentru a continua calculele, se procedează la *eliminarea prin sumare* (engl. "sum out") a variabilei, de unde vine şi numele metodei.

F este eliminată iar factorul său va depinde numai de G şi A. Valorile factorului rezultat, notat $f_{\bar{F}OX}$, se calculează, pentru fiecare combinație a valorilor variabilelor rămase, ca sumă a valorilor factorului inițial, f_{FOX} pentru toate valorile variabilei eliminate.

De exemplu:

$$f_{\bar{F}OX}(G_D, A_D) = f_{FOX}(F_D, G_D, A_D) + f_{FOX}(F_N, G_D, A_D).$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

G	A	$f_{\bar{F}OX}(G, A)$
D	D	0,24 + 0,004 = 0,244
D	N	0,21 + 0,006 = 0,216
N	D	0,075 + 0,015 = 0,09
N	N	0,015 + 0,019 = 0,034

Se poate vedea de exemplu că valoarea $0{,}244$ apare şi în calculele metodei de inferență prin enumerare $(0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1)$. Aceste 4 valori din tabelul de mai sus sunt exact valorile parantezelor interioare din exemplul din secțiunea 3.3. De această dată însă, calculele se fac o singură dată, la determinarea factorului.

Urmează apoi tratarea variabilei *Abces*:

$$f_{A\bar{F}OX}(G, A) = f_A(A) \times f_{\bar{F}OX}(G, A).$$

Valorile factorului sunt cele din tabelul de mai jos:

G	A	$f_{A\bar{F}OX}(G, A)$
D	D	0,05 · 0,244 = 0,0122
D	N	0,95 · 0,216 = 0,2052
N	D	0,05 · 0,09 = 0,0045
N	N	0,95 · 0,034 = 0,0323

=

A	$f_A(A)$
D	0,05
N	0,95

×

G	A	$f_{\bar{F}OX}(G, A)$
D	D	0,244
D	N	0,216
N	D	0,09
N	N	0,034

La fel, având acum o sumă după A, această variabilă este eliminată prin sumare, rezultând factorul $f_{\bar{A}\bar{F}OX}(G)$, cu valorile din tabelul următor:

G	$f_{\bar{A}\bar{F}OX}(G)$
D	0,0122 + 0,2052 = 0,2174
N	0,0045 + 0,0323 = 0,0368

Se poate observa că aceste valori sunt la fel cu acelea din parantezele exterioare din calculele din secțiunea 3.3, înainte de înmulțirile cu $P(G_D)$, respectiv cu $P(G_N)$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Ultimul factor este:

$$f_{G\bar{A}\bar{F}OX}(G) = f_G(G) \times f_{\bar{A}\bar{F}OX}(G, A).$$

cu valorile de mai jos:

G	$f_{G\bar{A}\bar{F}OX}(G)$
D	0,1 · 0,0122 = 0,02174
N	0,9 · 0,0323 = 0,03312

=

G	$f_G(G)$
D	0,1
N	0,9

×

G	$f_{\bar{A}\bar{F}OX}(G)$
D	0,2174
N	0,0368

Se vede că valorile sunt aceleaşi cu rezultatele finale din exemplul secțiunii 3.3. Şi în cazul metodei de eliminare a variabilelor, trebuie normalizate probabilitățile determinate, astfel încât suma lor să fie 1.

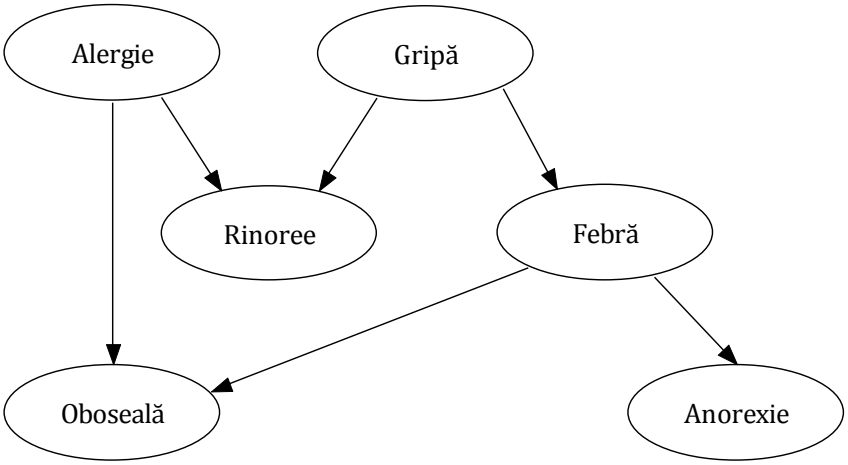


Figura 3.3. *Reţea bayesiană cu 6 noduri şi 6 arce*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

3.5. Variabile cu valori multiple. Ignorarea variabilelor irelevante

În această secțiune, vom considera un caz mai general de rețele bayesiene, cu mai multe variabile şi eliminând restricția ca acestea să aibă valori binare. Pentru analiză, vom utiliza rețeaua din figura 3.3.

Tabelele de probabilități sunt date în continuare. Variabila *Febră* are 3 valori: *Absentă* (*A*), *Mică* (*M*) şi *Ridicată* (*R*).

Tabelul 3.3. *Tabelele de probabilităţi pentru reţeaua bayesiană*

P(*Alergie = Da*)	*P*(*Alergie = Nu*)
0,05	0,95

P(*Gripă = Da*)	*P*(*Gripă = Nu*)
0,1	0,9

Gripă	*Alergie*	*P*(*Rinoree = Da*)	*P*(*Rinoree = Nu*)
Da	Da	0,95	0,05
Da	Nu	0,8	0,2
Nu	Da	0,9	0,1
Nu	Nu	0,1	0,9

Gripă	*P*(*Febră = Absentă*)	*P*(*Febră = Mică*)	*P*(*Febră = Ridicată*)
Da	0,1	0,25	0,65
Nu	0,9	0,05	0,05

Febră	*Alergie*	*P*(*Obosealã = Da*)	*P*(*Obosealã = Nu*)
Absentă	Da	0,3	0,7
Absentă	Nu	0,1	0,9
Mică	Da	0,5	0,5
Mică	Nu	0,4	0,6
Ridicată	Da	0,7	0,3
Ridicată	Nu	0,6	0,4

Febră	*P*(*Anorexie = Da*)	*P*(*Anorexie = Nu*)
Absentă	0,1	0,9
Mică	0,2	0,8
Ridicată	0,5	0,5

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Calculele de probabilităţi şi metodele de inferenţă sunt la fel.

Să considerăm următoarea interogare: „Care este probabilitatea ca o persoană să aibă alergie, dacă manifestă oboseală şi rinoree?"

$$P(A_D|O_D, R_D) = \alpha \cdot \sum_{g\in\{G_D,G_N\}} \sum_{f\in\{F_A,F_M,F_R\}} \sum_{x\in\{X_D,X_N\}} P(g, f, O_D, R_D, x).$$

Pentru a optimiza rezolvarea, utilizăm următorul rezultat.

O variabilă Y este *irelevantă* pentru o interogare dacă $Y \notin \Pi(\{Q\} \cup E)$, unde Q este variabila interogată, E este mulţimea variabilelor observate (evidenţă) iar $\Pi(M)$ este mulţimea predecesorilor tuturor nodurilor din mulţimea M.

În exemplul nostru, $Q = \{A\}$, $E = \{O, R\}$ şi $\Pi(\{A, O, R\}) = \{A, G, F\}$. Variabila *Anorexie* nu aparţine acestei mulţimi. Prin urmare, această variabilă este irelevantă pentru interogarea curentă şi poate fi ignorată:

$$P(A_D|O_D, R_D) = \alpha \cdot \sum_{g\in\{G_D,G_N\}} \sum_{f\in\{F_A,F_M,F_R\}} \sum_{x\in\{X_D,X_N\}} P(g, f, O_D, R_D, x) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{g} \sum_{f} P(G_D) \cdot P(a) \cdot P(f|G_D) \cdot P(O_D|a, f) \cdot P(R_D|a, G_D)$$

Calculele de probabilităţi se realizează ca în secţiunile anterioare, obţinând în final:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$P(A_D|O_D, R_D) = 0{,}24554 \approx 25\%,$

$P(A_N|O_D, R_D) = 0{,}75446 \approx 75\%.$

3.6. Cea mai probabilă explicaţie

Un alt tip de rezultat pe care îl putem obține pe baza unei rețele bayesiene este *cea mai probabilă explicație* (engl. "most probable explanation") pentru o evidență.

Fie E mulțimea variabilelor observate (evidența) şi M mulțimea celorlalte variabile, numită şi mulțimea de explicare. Se doreşte găsirea combinației de valori pentru variabilele din mulțimea de explicare, pentru care probabilitatea tuturor valorilor astfel obținute ale nodurilor rețelei să fie maximă: $\text{argmax}_m P(m, e)$, unde m este combinația de valori ale variabilelor din M iar e este combinația (dată) de valori ale variabilelor din E.

Ca exemplu, pentru rețeaua din figura 3.3, dorim să calculăm cea mai probabilă explicație pentru trei situații: $E_1 = \{R_D, O_D, X_N, F_A\}$, $E_2 = \{R_D, O_D, X_N, F_M\}$ şi $E_3 = \{R_D, O_D, X_N, F_R\}$. Mai exact, dorim să găsim cauza (alergie sau gripă) atunci când o persoană are rinoree (îi curge nasul), oboseală dar nu are anorexie (lipsa poftei de mâncare). Cele trei situații sunt diferențiate de nivelul febrei: în primul caz este absentă, în al doilea caz este mică iar în al treilea caz este ridicată.

În tabelul 3.4, primele patru coloane indică valorile celor patru variabile de evidență. Coloana 5 prezintă probabilitatea valorii A_D , în condițiile evidențelor date. Coloana 6 prezintă probabilitatea valorii G_D, în condițiile evidențelor date. Variabilele A şi G sunt binare, astfel încât este suficientă menționarea probabilității unei singure valori. Coloana 7 indică probabilitatea $P(m,\ e)$ pentru toate combinațiile de valori ale variabilelor de

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

explicare. Combinaţia pentru care această probabilitate este maximă este marcată cu litere aldine. Ultima coloană indică rezultatele: valorile variabilelor de explicare care determină cea mai probabilă explicaţie.

Tabelul 3.4. *Căutarea exhaustivă a celei mai probabile explicaţii*

R	O	X	F	A_D	G_D	$P(m,e)$	A, G – CMPE
D	D	N	A	57%	5%	A_N, G_N 0,00693 A_N, G_D 0,00068 **A_D, G_N 0,00984** A_D, G_D 0,00013	**A_D, G_N**
D	D	N	M	15%	75%	A_N, G_N 0,00137 **A_N, G_D 0,00608** A_D, G_N 0,00081 A_D, G_D 0,00048	**A_N, G_D**
D	D	N	R	10%	89%	A_N, G_N 0,00128 **A_N, G_D 0,01482** A_D, G_N 0,00071 A_D, G_D 0,00108	**A_N, G_D**

În primul caz, în absenţa febrei, cel mai probabil este că persoana are alergie şi nu gripă. Dacă are febră, mică sau ridicată, este mai probabil ca persoana să aibă gripă şi nu alergie.

Valorile din coloanele 5 şi 6 sunt în concordanţă cu cea mai probabilă explicaţie, totuşi trebuie precizat că $P(A_D)$ şi $P(G_D)$ sunt calculate considerând izolat variabilele A şi G. Cea mai probabilă explicaţie le consideră împreună. În cazul în care reţeaua conţine un număr mare de noduri, pot exista diferenţe între cele două tipuri de rezultate.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 4

Raţionamente aproximative

4.1. Introducere

Pentru probleme din „lumea reală” au fost construite reţele bayesiene cu sute de noduri, pentru care algoritmii exacţi îşi ating limitele, întrucât inferenţa este o problemă NP-dificilă (engl. “NP-hard”). Pentru reţele foarte complexe, inferenţa aproximativă este singura posibilitate de a obţine un rezultat. De asemenea, pentru alte probleme în care precizia nu este un factor critic, inferenţa aproximativă poate aduce un câştig important din punct de vedere al vitezei de calcul.

Algoritmii de eşantionare stohastică sunt cele mai des întâlnite metode aproximative de inferenţă. Ideea de bază este generarea aleatorie a unor instanţieri ale reţelei, adică determinarea de valori coerente pentru variabilele sale, şi apoi calcularea frecvenţelor instanţierilor în care apar valorile dorite pentru anumite variabile. Avantajul acestei clase de algoritmi este faptul că precizia calculelor creşte cu numărul de eşantioane generate şi este relativ independentă de dimensiunea reţelei. De asemenea, timpul de execuţie este relativ independent de topologia reţelei şi variază liniar cu numărul de eşantioane. Pentru aplicaţiile în care timpul este un factor critic, algoritmul poate fi oprit oricând, producând un rezultat cu o precizie în general dependentă de numărul de eşantioane generate până în acel moment (Cheng, 2001).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Metodele care vor fi descrise în continuare sunt de tipul *eşantionării progresive* (engl. "forward sampling"), în care eşantioanele sunt generate în ordinea topologică a nodurilor din rețea.

4.2. Inferenţa stohastică prin ponderarea verosimilităţii

Metoda de inferență prin *ponderarea verosimilității* (engl. "likelihood weighting") este o metodă simplă şi eficientă de aproximare stohastică (Fung & Chang, 1990; Shachter & Peot, 1990). Ideea de bază este generarea aleatorie a unor instanțieri ale rețelei şi calculul probabilităților dorite ca frecvențe relative de apariție. Valorile variabilelor neobservate au probabilități de apariție în conformitate cu probabilitățile nodurilor, iar nodurile de evidență iau mereu valorile observate.

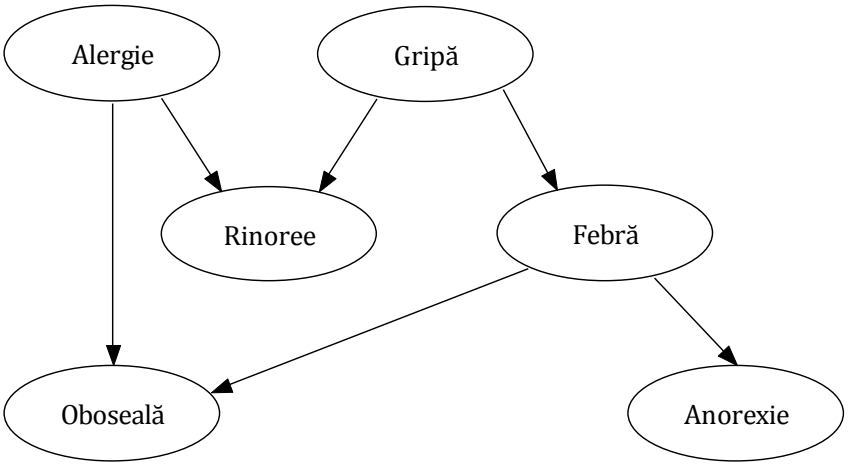


Figura 4.1. *Reţea bayesiană cu 6 noduri şi 6 arce*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Să considerăm aceeaşi reţea din figura 4.1 cu tabelele de probabilităţi din tabelul 4.1. Vom determina probabilitatea nodurilor neobservate din reţea, considerând următoarea evidenţă: *Rinoree = Da* şi *Oboseală = Da*.

Tabelul 4.1. *Tabelele de probabilităţi pentru reţeaua bayesiană*

P(*Alergie = Da*)	*P*(*Alergie = Nu*)
0,05	0,95

P(*Gripă = Da*)	*P*(*Gripă = Nu*)
0,1	0,9

Gripă	*Alergie*	*P*(*Rinoree = Da*)	*P*(*Rinoree = Nu*)
Da	Da	0,95	0,05
Da	Nu	0,8	0,2
Nu	Da	0,9	0,1
Nu	Nu	0,1	0,9

Gripă	*P*(*Febră = Absentă*)	*P*(*Febră = Mică*)	*P*(*Febră = Ridicată*)
Da	0,1	0,25	0,65
Nu	0,9	0,05	0,05

Febră	*Alergie*	*P*(*Oboseală = Da*)	*P*(*Oboseală = Nu*)
Absentă	Da	0,3	0,7
Absentă	Nu	0,1	0,9
Mică	Da	0,5	0,5
Mică	Nu	0,4	0,6
Ridicată	Da	0,7	0,3
Ridicată	Nu	0,6	0,4

Febră	*P*(*Anorexie = Da*)	*P*(*Anorexie = Nu*)
Absentă	0,1	0,9
Mică	0,2	0,8
Ridicată	0,5	0,5

Nodurile fără părinţi vor fi instanţiate potrivit probabilităţilor lor marginale.

Nodul *Alergie* va lua valoarea *Da* cu probabilitatea de 5% şi *Nu* cu probabilitatea de 95%. Din punct de vedere practic, acest lucru corespunde

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

unui prag cu valoare 0,05. Se generează după distribuţia uniformă un număr aleatoriu r între 0 şi 1. Dacă $r < 0{,}05$, nodul va lua valoarea *Da*, altfel va lua valoarea *Nu*.

Analog, nodul *Gripă* va lua valoarea *Da* cu probabilitatea de 10% şi *Nu* cu probabilitatea de 90%.

Să presupunem că nodurile *Alergie* şi *Gripă* au fost instanţiate ambele cu valoarea *Nu*.

Următorul nod, în ordinea dată de sortarea topologică, este *Rinoree*. Acesta este un nod evidenţă şi va fi instanţiat întotdeauna cu valoarea observată, *Da*.

Urmează nodul *Febră* iar probabilităţile valorilor acestuia sunt cele condiţionate de valorile deja cunoscute:

$$P(F_A|A_N, G_N, R_D, O_D) = P(F_A|G_N) = 0{,}9,$$
$$P(F_M|A_N, G_N, R_D, O_D) = P(F_M|G_N) = 0{,}05,$$
$$P(F_R|A_N, G_N, R_D, O_D) = P(F_R|G_N) = 0{,}05.$$

Din punct de vedere al implementării, vor exista în acest caz două praguri corespunzătoare probabilităţilor cumulate: 0,9 şi $0{,}9 + 0{,}05 = 0{,}95$. Se generează un număr aleatoriu r între 0 şi 1. Dacă $r < 0{,}9$, nodul va lua valoarea *Absentă*, dacă $r \in [0{,}9;\ 0{,}95)$, nodul va lua valoarea *Mică*, iar dacă $r \geq 0{,}95$, nodul va lua valoarea *Mare*.

Să presupunem că nodul *Febră* este instanţiat cu valoarea *Absentă*. Mai rămâne variabila evidenţă *Oboseală*, care va lua automat valoarea *Da*, şi variabila *Anorexie*, cu următoarele probabilităţi:

$$P(X_D|A_N, G_N, R_D, F_A, O_D) = P(X_D|F_A) = 0{,}1,$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(X_N|A_N, G_N, R_D, F_A, O_D) = P(X_N|F_A) = 0{,}9.$$

Să presupunem că valoarea va fi *Nu*.

Astfel, am generat o instanțiere a rețelei (un caz) cu următoarele valori: $s = (A_N, G_N, R_D, F_A, O_D, X_N)$.

Ponderea unui caz este:

$$w(s) = \frac{\prod_{x \in U} P(x|\pi(x))}{\prod_{x \in U \setminus E} P(x|\pi(x))}, \tag{4.1}$$

unde U este mulțimea tuturor nodurilor iar E este mulțimea nodurilor evidență.

Pentru cazul de mai sus, se inițializează cele două produse cu $w_1 = 1$ şi $w_2 = 1$. Vom considera pe rând variabilele din rețea:

$P(Alergie = Nu) = 0{,}95$

$\Rightarrow w_1 \leftarrow w_1 \cdot 0{,}95 = 0{,}95, w_2 \leftarrow w_2 \cdot 0{,}95 = 0{,}95$

$P(Gripă = Nu) = 0{,}9$

$\Rightarrow w_1 \leftarrow w_1 \cdot 0{,}9 = 0{,}855, w_2 \leftarrow w_2 \cdot 0{,}9 = 0{,}855$

$P(Febră = Absentă) = 0{,}9$

$\Rightarrow w_1 \leftarrow w_1 \cdot 0{,}9 = 0{,}7695, w_2 \leftarrow w_2 \cdot 0{,}9 = 0{,}7695$

$P(Oboseală = Da) = 0{,}1$

$\Rightarrow w_1 \leftarrow w_1 \cdot 0{,}1 = 0{,}07695$, w_2 nu se modifică (*Oboseala* este evidență)

$P(Anorexie = Nu) = 0{,}9$

$\Rightarrow w_1 \leftarrow w_1 \cdot 0{,}9 = 0{,}069255, w_2 \leftarrow w_2 \cdot 0{,}9 = 0{,}69255$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$P(Rinoree = Da) = 0{,}1$

$\Rightarrow w_1 \leftarrow w_1 \cdot 0{,}1 = 0{,}0069255$, w_2 nu se modifică (*Rinoreea* este evidenţă)

Prin urmare, ponderea cazului este:

$$w(s) = \frac{w_1}{w_2} = \frac{0{,}0069255}{0{,}69255} = 0{,}01.$$

Se repetă procesul pentru un număr prestabilit de eşantioane. În continuare, vom considera 10 eşantioane. Pentru rezultate semnificative, numărul trebuie să fie mult mai mare. De asemenea, pentru a sublinia faptul că rezultatele sortării topologice nu sunt unice, vom considera ordinea următoare: { *A*, *G*, *F*, *O*, *X*, *R* }.

Eşantion 1: Nu, Nu, Absentă, Da, Nu, Da

Variabila: Alergie (interogare), P = 0,95, w1 = 0,95, w2 = 0,95

Variabila: Gripă (interogare), P = 0,9, w1 = 0,855, w2 = 0,855

Variabila: Febră (interogare), P = 0,9, w1 = 0,7695, w2 = 0,7695

Variabila: Oboseală (evidenţă), P = 0,1, w1 = 0,07695

Variabila: Anorexie (interogare), P = 0,9, w1 = 0,069255, w2 = 0,69255

Variabila: Rinoree (evidenţă), P = 0,1, w1 = 0,0069255

w1 = 0,0069255, w2 = 0,69255 ⇒ w = 0,01

Eşantion 2: Nu, Nu, Absentă, Da, Nu, Da

w1 = 0,0069255, w2 = 0,69255 ⇒ w = 0,01

Eşantion 3: Nu, Nu, Absentă, Da, Nu, Da

w1 = 0,0069255, w2 = 0,69255 ⇒ w = 0,01

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Eşantion 4: Nu, Nu, Absentă, Da, Nu, Da

w1 = 0,0069255, w2 = 0,69255 ⇒ w = 0,01

Eşantion 5: Da, Nu, Absentă, Da, Da, Da

Variabila: Alergie (interogare), P = 0,05, w1 = 0,05, w2 = 0,05

Variabila: Gripă (interogare), P = 0,9, w1 = 0,045, w2 = 0,045

Variabila: Febră (interogare), P = 0,9, w1 = 0,0405, w2 = 0,0405

Variabila: Oboseală (evidenţă), P = 0,3, w1 = 0,01215

Variabila: Anorexie (interogare), P = 0,1, w1 = 0,001215, w2 = 0,00405

Variabila: Rinoree (evidenţă), P = 0,9, w1 = 0,0010935

w1 = 0,0010935, w2 = 0,00405 ⇒ w = 0,27

Eşantion 6: Nu, Da, Mică, Da, Nu, Da

Variabila: Alergie (interogare), P = 0,95, w1 = 0,95, w2 = 0,95

Variabila: Gripă (interogare), P = 0,1, w1 = 0,095, w2 = 0,095

Variabila: Febră (interogare), P = 0,25, w1 = 0,02375, w2 = 0,02375

Variabila: Oboseală (evidenţă), P = 0,4, w1 = 0,0095

Variabila: Anorexie (interogare), P = 0,8, w1 = 0,0076, w2 = 0,019

Variabila: Rinoree (evidenţă), P = 0,8, w1 = 0,00608

w1 = 0,00608, w2 = 0,019 ⇒ w = 0,32

Eşantion 7: Nu, Nu, Absentă, Da, Nu, Da

w1 = 0,0069255, w2 = 0,69255 ⇒ w = 0,01

Eşantion 8: Nu, Nu, Absentă, Da, Nu, Da

w1 = 0,0069255, w2 = 0,69255 ⇒ w = 0,01

Eşantion 9: Nu, Nu, Absentă, Da, Nu, Da

w1 = 0,0069255, w2 = 0,69255 ⇒ w = 0,01

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Eşantion 10: Nu, Nu, Absentă, Da, Nu, Da

w1 = 0,0069255, w2 = 0,69255 ⇒ w = 0,01

În final, are loc o fază de normalizare, în care se calculează suma ponderilor cazurilor în care o variabilă de interogare a avut o anumită valoare, împărțită la suma ponderilor tuturor cazurilor:

$$P(Var = val) = \frac{w_T}{w_S} = \frac{\sum_{s \in T} w(s)}{\sum_{s \in S} w(s)}, \tag{4.2}$$

unde S este mulțimea tuturor eşantioanelor iar $T \subseteq S$ este submulțimea de eşantioane în care variabila Var apare cu valoarea val.

Pentru problema considerată, rezultatele obținute sunt cele de mai jos.

Alergie

Nu: $w_T = 0,4$, $w_S = 0,67$, P = 0,597

Da: $w_T = 0,27$, $w_S = 0,67$, P = 0,403

Gripă

Nu: $w_T = 0,35$, $w_S = 0,67$, P = 0,5224

Da: $w_T = 0,32$, $w_S = 0,67$, P = 0,4776

Febră

Absentă: $w_T = 0,35$, $w_S = 0,67$, P = 0,5224

Mică: $w_T = 0,32$, $w_S = 0,67$, P = 0,4776

Ridicată: $w_T = 0,0$, $w_S = 0,67$, P = 0,0

Oboseală *(nod evidenţă)*

Nu: $w_T = 0,0$, $w_S = 0,67$, P = 0,0

Da: $w_T = 0,67$, $w_S = 0,67$, P = 1,0

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Anorexie

Nu: $w_T = 0,4$, $w_S = 0,67$, P = 0,597

Da: $w_T = 0,27$, $w_S = 0,67$, P = 0,403

Rinoree *(nod evidenţă)*

Nu: $w_T = 0,0$, $w_S = 0,67$, P = 0,0

Da: $w_T = 0,67$, $w_S = 0,67$, P = 1,0

În tabelul 4.2 se poate vedea cum evoluează probabilităţile nodurilor atunci când variază numărul de eşantioane. Cu cât acest număr este mai mare, cu atât este mai apropiată valoarea aproximativă calculată de probabilitatea exactă.

Tabelul 4.2. *Evoluţia probabilităţilor nodurilor cu numărul de eşantioane*

Variabilă / valoare	**Probabilitatea (număr de eşantioane)**				
	10	**1.000**	**10.000**	**100.000**	**1.000.000**
Alergie = nu	0,597	0,717	0,7589	0,7599	0,754
Alergie = da	0,403	0,283	0,2411	0,2401	0,246
Febră = mică	0,4776	0,1563	0,1583	0,1653	0,1639
Febră = ridicată	0,0	0,5487	0,543	0,5453	0,5405
Febră= absentă	0,5224	0,295	0,2987	0,2894	0,2956
Anorexie = nu	0,597	0,6794	0,6885	0,66	0,6673
Anorexie = da	0,403	0,3206	0,3115	0,34	0,3327
Gripă = nu	0,5224	0,4075	0,3806	0,3786	0,3844
Gripă = da	0,4776	0,5925	0,6194	0,6214	0,6156

Un exemplu de variaţie şi convergenţă a probabilităţilor cu numărul de eşantioane este prezentat în figura 4.2. În afară de variabila *Febră*, care are trei valori, celelalte variabile sunt binare şi de aceea graficul prezintă doar o singură valoare, cu probabilitatea p, cealaltă având probabilitatea $1 - p$.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

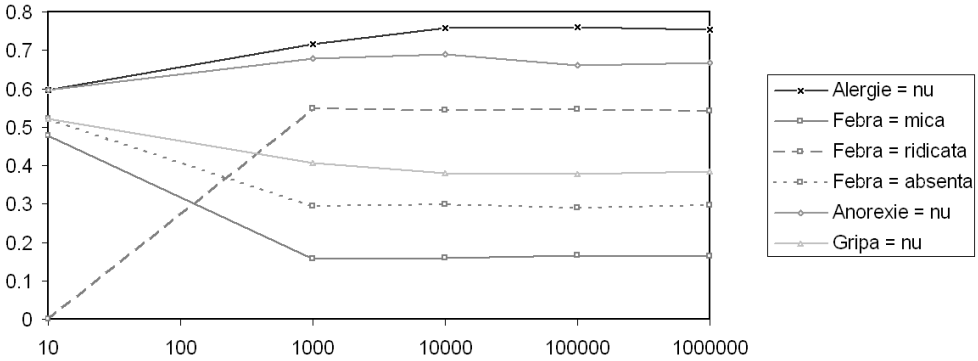


Figura 4.2. *Convergenţa valorilor aproximative la probabilităţile exacte când numărul de eşantioane creşte*

Când numărul de eşantioane este mare, se vede că valorile converg, de exemplu valoarea *Nu* pentru variabila *Alergie* tinde la 75%, aşa cum s-a calculat în secţiunea 3.5.

La fel, se pot estima şi probabilităţile marginale ale variabilelor, în absenţa evidenţelor.

Datorită simplităţii sale, algoritmul cu ponderarea verosimilităţii este una din cele mai des utilizate metode de simulare pentru inferenţa în reţele bayesiene. De multe ori, precizia sa este comparabilă cu a metodelor mai sofisticate, întrucât poate genera mai multe eşantioane decât alţi algoritmi în acelaşi interval de timp.

Atunci când probabilitatea evidenţei este foarte mică, convergenţa sa poate fi foarte lentă. Viteza de convergenţă scade de asemenea când există multe noduri de evidenţă, deoarece probabilitatea evidenţei în ansamblu scade exponenţial, fiind un produs de numere subunitare. De asemenea, în lipsa unui expert, este dificil de apreciat cât de corecte sunt rezultatele oferite, pentru că metoda nu permite calcularea unor intervale de încredere bine precizate (Cheng, 2001).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

4.3. Alte metode de inferenţă aproximativă

După cum am spus mai sus, un dezavantaj al inferenţei prin ponderarea verosimilităţii este convergenţa lentă când probabilitatea evidenţei este foarte mică. Una din ideile de bază ale algoritmilor mai recenţi este că la început se eşantionează după o distribuţie diferită de cea definită de probabilităţile (condiţionate ale) nodurilor, astfel încât valorile puţin probabile să aibă şanse mai mari de apariţie. Pe măsură ce numărul de eşantioane creşte, distribuţia după care se eşantionează converge la distribuţia definită de tabelele de probabilităţi ale nodurilor.

Dintre algoritmii mai complecşi care dau în schimb rezultate bune din punct de vedere al vitezei de convergenţă şi a preciziei amintim *AIS-BN* (Cheng & Druzdzel, 2000) şi *EPIS-BN* (Yuan & Druzdzel, 2003). Rata de convergenţă poate fi de asemenea îmbunătăţită folosind tehnici mai elaborate pentru eşantionare, cum ar fi *hipercubul latin* (engl. "Latin hypercube"), în care distribuţia de probabilitate este divizată într-un număr de intervale echiprobabile şi fiecare interval este eşantionat o singură dată (Cheng & Druzdzel, 2000). Avantajul faţă de metoda Monte Carlo, pur aleatorie, este generarea unei mulţimi de eşantioane care reflectă mai precis forma distribuţiei considerate.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 5

Teoria evidenţelor

5.1. Teoria Dempster-Shafer

Având în vedere că pentru o propoziție pot exista diferite evidențe care să o susțină în grade diferite, posibil contradictorii, o primă modalitate de combinare a gradelor de încredere derivate din surse independente de evidență a fost dezvoltată de către Dempster (1968) şi studentul său, Shafer (1976). Această abordare a fost considerată foarte potrivită pentru aplicarea în sistemele expert din anii '80.

Teoria evidențelor poate fi considerată într-un fel o extensie a modelului clasic de probabilități, deoarece în locul unui singur număr, reprezentând o probabilitate, se lucrează cu intervale de încredere pentru evenimente.

Limita inferioară a intervalului care exprimă încrederea că un eveniment se poate întâmpla se numeşte *convingere* (engl. "belief"), notată *Bel*, iar cea superioară – *plauzibilitate* (engl. "plausibility"), notată *Pl*. Pentru un eveniment:

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A). \tag{5.1}$$

Este important de subliniat faptul că aici se calculează *independent* valorile pentru *A* şi non-*A*. Fiecare eveniment are un grad de susținere între 0 şi 1: 0 înseamnă că nu există susținere iar 1 înseamnă o susținere totală

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

pentru acesta. Spre deosebire de modelul bayesian, suma convingerilor într-un eveniment şi în negatul acestuia nu este 1. Ambele valori pot fi 0, dacă nu există evidenţe nici pentru şi nici împotriva acestuia. În consecinţă, dacă nu avem informaţii nici despre A şi nici despre $\neg A$, intervalul de încredere este $[0,1]$, în locul unei probabilităţi de 0,5. Pe măsură ce se acumulează informaţii, intervalul se micşorează, respectându-se relaţia:

$$Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A). \tag{5.2}$$

Dacă se cunoaşte precis probabilitatea evenimentului, atunci intervalul se reduce la un punct şi rezultatul este echivalent cu modelul clasic:

$$Bel(A) = P(A) = Pl(A). \tag{5.3}$$

De exemplu, la aruncarea unui ban, probabilitatea a-priori să iasă „cap" este 0,5. Însă neştiind nimic despre ban, orice rezultat ar putea fi posibil. În lipsa oricăror informaţii, intervalul de încredere este [0,1]:

$$Bel(cap) = 0,$$
$$Pl(cap) = 1 - Bel(\neg cap) = 1 - 0 = 1.$$

Dacă un expert afirmă că este 90% sigur că banul este corect, atunci:

$$Bel(cap) = 0,9 \cdot 0,5 = 0,45,$$
$$Pl(cap) = 1 - Bel(\neg cap) = 1 - 0,9 \cdot 0,5 = 0,55.$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Intervalul de încredere este: $[0{,}45, 0{,}55]$.

Să mai considerăm un exemplu. Două site-uri de ştiri relatează despre o demonstrație. Primul site are nivelul de încredere de 80% iar al doilea are nivelul de încredere de 60%. Ambele afirmă că demonstrația a fost una mare, cu peste 10000 de participanți. Intuitiv, putem considera că probabilitatea ca ambele site-uri să mintă este $(1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}08$. Probabilitatea ca măcar unul din site-uri să spună adevărul este $1 - 0{,}08 = 0{,}92$. Prin urmare, intervalul de încredere este: $[0{,}92, 1]$. Limita superioară este 1 deoarece nu există evidențe împotriva faptului că demonstrația a fost mare.

Însă poate exista situația în care primul site afirmă că demonstrația a fost mare iar al doilea afirmă contrariul. Ne interesează intervalul de încredere pentru evenimentul „demonstrația a fost mare”. În acest caz, nu pot fi ambele site-uri de încredere, deoarece mărturiile se contrazic. Rămân următoarele posibilități:

- Doar primul site este de încredere (demonstrația a fost mare): $0{,}8 \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}32$;
- Doar al doilea site este de încredere (demonstrația nu a fost mare): $(1 - 0{,}8) \cdot 0{,}6 = 0{,}12$;
- Niciun site nu este de încredere (nu ştim nimic precis): $(1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}08$.

Suma tuturor probabilităților nenule, care va servi ca factor pentru normalizare, este: $0{,}32 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}52$. Prin urmare, convingerea că demonstrația a fost mare este: $0{,}32/0{,}52 = 0{,}62$ iar convingerea că demonstrația nu a fost mare este: $0{,}12/0{,}52 = 0{,}23$. Plauzibilitatea unei

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

demonstraţii mari este: $1 - 0{,}23 = 0{,}77$. Intervalul de încredere este deci: $[0{,}62, 0{,}77]$.

Pentru a formaliza modelul, fie Θ mulţimea tuturor ipotezelor mutual excluzive, numită şi *cadru de discernământ* (engl. "frame of discernment").

Pentru exemplul anterior, Θ = {*Mare*, *Mică*}.

Nivelul de încredere al unei evidenţe este probabilitatea ca evidenţa să fie de încredere, de exemplu gradul în care fiecare din cele două site-uri pot fi crezute (0,8 şi respectiv 0,6).

Fie m o funcţie numită *atribuire de convingeri de bază* (engl. "basic belief assignment", BBA) sau *funcţie de masă* (engl. "mass function"), $m: \wp(\Theta) \to [0, 1]$, unde $\wp(\Theta)$ este mulţimea părţilor lui Θ (mulţimea de mulţimi care se pot forma din elementele lui Θ).

Valorile lui m, de tipul $m(A)$ se numesc *mase de convingeri de bază* (engl. "basic belief masses", BBM). Aplicând relaţiile teoriei Dempster-Shafer, vom avea întotdeauna:

$$\sum_{A \in \wp(\Theta)} m(A) = 1. \tag{5.4}$$

După cum am menţionat, teoria ne permite să combinăm convingerile care apar din surse multiple de evidenţă. Ecuaţia fundamentală Dempster-Shafer pentru combinarea evidenţelor date de m_1 şi m_2 într-o nouă atribuire de convingeri de bază m_3 este:

$$m_3(Z) = \frac{\sum_{X \cap Y = Z} m_1(X) \cdot m_2(Y)}{1 - \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X) \cdot m_2(Y)}. \tag{5.5}$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Se consideră că $m(\emptyset) = 0$.

Pentru exemplul cu demonstrația, când evidențele celor două site-uri coincid, vom avea:

$m_1(\{Mare\})$ = 0,8
$m_1(\Theta)$ = 0,2
$m_2(\{Mare\})$ = 0,6
$m_2(\Theta)$ = 0,4.

Se observă că incertitudinea rămasă după precizarea explicită a tuturor evidențelor se atribuie cadrului de discernământ Θ.

Aplicarea regulii de combinare a evidențelor se poate face mai uşor considerând un tabel de forma:

X	$m_1(X)$	*Y*	$m_2(Y)$	∩	×
{Mare}	0,8	{Mare}	0,6	{Mare}	0,48
{Mare}	0,8	Θ	0,4	{Mare}	0,32
Θ	0,2	{Mare}	0,6	{Mare}	0,12
Θ	0,2	Θ	0,4	Θ	0,08

Penultima coloană reprezintă intersecția dintre mulțimile de elemente *X* şi *Y*, iar ultima coloană indică produsul maselor de convingeri de bază corespunzătoare.

Întrucât evidențele nu se contrazic, nu apare în intersecție mulțimea vidă. În consecință, valoarea numitorului din ecuația 5.5 va fi: $1 - 0 = 1$.

Din tabel rezultă noua funcție de masă m_3:

$m_3(\{Mare\})$ = 0,48 + 0,32 + 0,12 = 0,92
$m_3(\Theta)$ = 0,08.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Prin urmare:

$\text{Bel}(\{Mare\}) = 0{,}92$

$\text{Pl}(\{Mare\}) = 1 - \text{Bel}(\{Mică\}) = 1.$

Intervalul de încredere pentru demonstraţia mare este acelaşi ca mai sus: $[0{,}92, 1]$.

În al doilea caz, în care primul site afirmă că demonstraţia a fost una mare, iar al doilea că a fost una mică, vom avea:

$m_1(\{Mare\}) = 0{,}8$

$m_1(\Theta) = 0{,}2$

$m_2(\{Mică\}) = 0{,}6$

$m_2(\Theta) = 0{,}4.$

Trebuie să subliniem faptul că ar fi incorect să considerăm $m_2(\{Mare\}) = 0{,}4$, deoarece al doilea site a spus doar că demonstraţia a fost mică, nu a spus nimic despre o demonstraţie mare.

Tabelul pentru calcule va fi următorul:

X	$m_1(X)$	*Y*	$m_2(Y)$	∩	×
{Mare}	0,8	{Mică}	0,6	Ø	0,48
{Mare}	0,8	Θ	0,4	{Mare}	0,32
Θ	0,2	{Mică}	0,6	{Mică}	0,12
Θ	0,2	Θ	0,4	Θ	0,08

Având în vedere că valoarea asociată mulţimii vide este 0,48, numitorul fracţiei va fi $1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Funcția de masă m_3 va fi definită astfel:

$m_3(\{Mare\}) = 0{,}32 \,/\, 0{,}52 = 0{,}62$
$m_3(\{Mică\}) = 0{,}12 \,/\, 0{,}52 = 0{,}23$
$m_3(\Theta) = 0{,}08 \,/\, 0{,}52 = 0{,}15.$

Prin urmare:

$\mathrm{Bel}(\{Mare\}) = 0{,}62$
$\mathrm{Bel}(\{Mică\}) = 0{,}23$
$\mathrm{Pl}(\{Mare\}) = 1 - \mathrm{Bel}(\neg\{Mare\}) = 1 - \mathrm{Bel}(\Theta \setminus \{Mare\}) =$
$1 - \mathrm{Bel}(\{Mică\}) = 0{,}77$
$\mathrm{Pl}(\{Mică\}) = 1 - \mathrm{Bel}(\{Mare\}) = 0{,}38.$

Intervalele de încredere sunt: pentru $\{Mare\}$ – $[0{,}62, 0{,}77]$ iar pentru $\{Mică\}$ – $[0{,}23, 0{,}38]$.

5.2. Surse multiple de evidenţă

În cele ce urmează, vom considera un exemplu mai complex pentru a urmări modul în care se combină succesiv mai multe evidențe. Să presupunem că un pacient internat în spital poate avea răceală, gripă, meningită sau indigestie.

Vom nota acest lucru astfel: $\Theta = \{R, G, M, I\}$.

Pacientul are febră şi greţuri. Din studii anterioare, ştim că febra susține răceala sau gripa la un nivel de 60%, meningita la un nivel de 20% iar indigestia la un nivel de 10%. Formal, vom avea:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$m_1(\{R,G\}) = 0,6$

$m_1(\{M\}) = 0,2$

$m_1(\{I\}) = 0,1$

$m_1(\Theta) = 0,1.$

De asemenea, grețurile susțin ipoteza meningitei sau indigestiei la nivelul de 70%:

$m_2(\{M,I\}) = 0,7$

$m_2(\Theta) = 0,3.$

În tabelul următor se prezintă modul de combinare a acestor două evidențe inițiale:

X	$m_1(X)$	*Y*	$m_2(Y)$	∩	×
{R,G}	0,6	{M,I}	0,7	Ø	0,42
{R,G}	0,6	Θ	0,3	{R,G}	0,18
{M}	0,2	{M,I}	0,7	{M}	0,14
{M}	0,2	Θ	0,3	{M}	0,06
{I}	0,1	{M,I}	0,7	{I}	0,07
{I}	0,1	Θ	0,3	{I}	0,03
Θ	0,1	{M,I}	0,7	{M,I}	0,07
Θ	0,1	Θ	0,3	Θ	0,03

Valoarea asociată mulțimii vide este $0,42$ şi deci numitorul fracției va fi $1 - 0,42 = 0,58$.

Funcția de masă m_3 va fi definită astfel:

$m_3(\{R,G\}) = 0,18 \,/\, 0,58 = 0,3103$

$m_3(\{M\}) = (0,14 + 0,06) \,/\, 0,58 = 0,3448$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$m_3(\{I\}) = (0{,}07 + 0{,}03) / 0{,}58 = 0{,}1724$

$m_3(\{M,I\}) = 0{,}07 / 0{,}58 = 0{,}1207$

$m_3(\Theta) = 0{,}03 / 0{,}58 = 0{,}0517.$

Din masele de convingeri de bază putem deduce convingerile:

$\text{Bel}(\{R,G\}) = 0{,}3103$

$\text{Bel}(\{M\}) = 0{,}3448$

$\text{Bel}(\{I\}) = 0{,}1724$

$\text{Bel}(\{M,I\}) = 0{,}1207 + 0{,}3448 + 0{,}1724 = 0{,}6379.$

Pentru calculul lui $\text{Bel}(\{M,I\})$ se observă că se iau în calcul toate submulţimile mulţimii $\{M, I\}$, respectiv $\{M\}$, $\{I\}$ şi $\{M, I\}$.

Convingerea asociată unei mulţimi este suma maselor tuturor submulţimilor acesteia.

Putem calcula apoi plauzibilităţile mulţimilor:

$\text{Pl}(\{R,G\}) = 1 - \text{Bel}(\{M,I\}) = 1 - 0{,}6379 = 0{,}3621$

$\text{Pl}(\{M\}) = 1 - \text{Bel}(\{R,G,I\}) = 1 - (m_3(\{R,G\}) + m_3(\{I\})) = 0{,}5173$

$\text{Pl}(\{I\}) = 1 - \text{Bel}(\{R,G,M\}) = 1 - (m_3(\{R,G\}) + m_3(\{M\})) = 0{,}3449$

$\text{Pl}(\{M,I\}) = 1 - \text{Bel}(\{R,G\}) = 0{,}6897.$

Intervalele de încredere vor fi cele de mai jos:

$\{R,G\}$: $[0{,}3103, 0{,}3621]$

$\{M\}$: $[0{,}3448, 0{,}5173]$

$\{I\}$: $[0{,}1724, 0{,}3449]$

$\{M,I\}$: $[0{,}6379, 0{,}6897]$.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Să considerăm acum că pacientul face un test care sprijină la nivelul 99% faptul că pacientul nu are meningită, ceea ce înseamnă că rămân celelalte trei posibilități – răceală, gripă sau indigestie:

$m_4(\{R,G,I\}) = 0{,}99$

$m_4(\Theta) = 0{,}01.$

Testul spune doar că *nu este* meningită, nu spune nimic despre probabilitatea de *a fi* meningită. După cum am precizat, în teoria evidențelor posibilitățile A şi $\neg A$ sunt considerate independent.

Interpretarea este diferită față de cazul în care am considera $m_4(\{M\}) = 0{,}01$. În această din urmă situație, intervalele ar rămâne aproape la fel, cu o foarte uşoară creştere a încrederii lui M.

Tabelul care ne ajută să adăugăm noua evidență este prezentat mai jos:

X	$m_3(X)$	Y	$m_4(Y)$	$\cap$	$\times$
{R,G}	0,3103	{R,G,I}	0,99	{R,G}	0,3072
{M}	0,3448	{R,G,I}	0,99	Ø	0,3414
{I}	0,1724	{R,G,I}	0,99	{I}	0,1707
{M,I}	0,1207	{R,G,I}	0,99	{I}	0,1195
Θ	0,0517	{R,G,I}	0,99	{R,G,I}	0,0512
{R,G}	0,3103	Θ	0,01	{R,G}	0,0031
{M}	0,3448	Θ	0,01	{M}	0,0034
{I}	0,1724	Θ	0,01	{I}	0,0017
{M,I}	0,1207	Θ	0,01	{M,I}	0,0012
Θ	0,0517	Θ	0,01	Θ	0,0005

Valoarea asociată mulțimii vide este 0,3414 şi deci numitorul fracției va fi 0,6586.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Funcţia de masă m_5 va fi definită astfel:

$m_5(\{R,G\}) = (0{,}3072 + 0{,}0031) / 0{,}6586 = 0{,}4712$
$m_5(\{M\}) = 0{,}0034 / 0{,}6586 = 0{,}0052$
$m_5(\{I\}) = (0{,}1707 + 0{,}1195 + 0{,}0017) / 0{,}6586 = 0{,}4432$
$m_5(\{M,I\}) = 0{,}0012 / 0{,}6586 = 0{,}0018$
$m_5(\{R,G,I\}) = 0{,}0512 / 0{,}6586 = 0{,}0777$
$m_5(\Theta) = 0{,}0005 / 0{,}6586 = 0{,}0008.$

Convingerile mulţimilor vor fi:

$\text{Bel}(\{R,G\}) = 0{,}4712$
$\text{Bel}(\{M\}) = 0{,}0052$
$\text{Bel}(\{I\}) = 0{,}4432$
$\text{Bel}(\{M,I\}) = 0{,}0052 + 0{,}0018 = 0{,}007$
$\text{Bel}(\{R,G,I\}) = 0{,}4712 + 0{,}4432 + 0{,}0777 = 0{,}9921.$

Plauzibilităţile mulţimilor vor fi:

$\text{Pl}(\{R,G\}) = 1 - \text{Bel}(\{M,I\}) = 1 - 0{,}007 = 0{,}993$
$\text{Pl}(\{M\}) = 1 - \text{Bel}(\{R,G,I\}) = 1 - 0{,}9921 = 0{,}0079$
$\text{Pl}(\{I\}) = 1 - \text{Bel}(\{R,G,M\}) = 1 - (0{,}4712 + 0{,}0052) = 0{,}5236$
$\text{Pl}(\{M,I\}) = 1 - \text{Bel}(\{R,G\}) = 1 - 0{,}4712 = 0{,}5288$
$\text{Pl}(\{R,G,I\}) = 1 - \text{Bel}(\{M\}) = 1 - 0{,}0052 = 0{,}9948.$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Intervalele de încredere ale mulțimilor sunt acum următoarele:

$\{R,G\}$: [0,4712, 0,993]
$\{M\}$: [0,0052, 0,0079]
$\{I\}$: [0,4432, 0,5236]
$\{M,I\}$: [0,007, 0,5288]
$\{R,G,I\}$: [0,9921, 0,9948].

Tabelul următor arată cum s-au modificat intervalele de încredere prin adăugarea evidenței testului care a exclus meningita:

X	*Interval de încredere* m_3	*Interval de încredere* m_5
{R,G}	[0,3103, 0,3621]	[0,4712, 0,993]
{M}	[0,3448, 0,5173]	[0,0052, 0,0079]
{I}	[0,1724, 0,3449]	[0,4432, 0,5236]
{M,I}	[0,6379, 0,6897]	[0,007, 0,5288]
{R,G,I}		[0,9921, 0,9948]

5.3. Reguli alternative de combinare a evidenţelor

Atunci când evidențele sunt conflictuale, rezultatele obținute prin aplicarea regulii de combinare a lui Dempster pot fi contraintuitive şi neplauzibile. O astfel de situație este cea din exemplul următor (Zadeh, 1979). Un pacient este examinat de doi medici, care stabilesc că ar putea avea meningită (*M*), o contuzie (*C*) sau o tumoare pe creier (*T*). Ambii medici consideră că tumoarea este improbabilă, în schimb nu se pun de acord asupra diagnosticului cel mai probabil, rezultând situația următoare:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$\Theta = \{M, C, T\}$

$m_1(\{M\}) = 0{,}99$

$m_1(\{T\}) = 0{,}01$

$m_2(\{C\}) = 0{,}99$

$m_2(\{T\}) = 0{,}01.$

Tabelul indică modul de combinare a celor două evidenţe:

X	$m_3(X)$	*Y*	$m_4(Y)$	∩	×
{M}	0,99	{C}	0,99	Ø	0,9801
{M}	0,99	{T}	0,01	Ø	0,0099
{T}	0,01	{C}	0,99	Ø	0,0099
{T}	0,01	{T}	0,01	{T}	0,0001

Valoarea corespunzătoare mulţimii vide este în acest caz 0,9801 + 0,0099 + 0,0099 = 0,9999 şi deci numărătorul fracţiei va fi 0,0001.

Funcţia de masă m_3 va fi doar:

$m_3(\{T\}) = 0{,}0001 \,/\, 0{,}0001 = 1.$

Rezultatul este contraintuitiv, deoarece tumoarea apare ca sigură deşi ambii medici au considerat-o foarte improbabilă.

5.3.1. Regula lui Yager

În cazul în care mai multe evidenţe trebuie combinate simultan, regula lui Yager (1987) este:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$m_{n+1}(Z) = \sum_{\cap_{i=1}^{n} X_i = Z} m_1(X_1) \cdot \ldots \cdot m_n(X_n). \tag{5.6}$$

Spre deosebire de regula lui Dempster, $m(\emptyset) \geq 0$.

Regula lui Yager nu normalizează conflictul, ci îl adaugă la mulțimea Θ.

Pentru combinarea a două surse de evidență se folosesc următoarele relații:

$$m_3(Z) = \sum_{X \cap Y = Z \neq \emptyset} m_1(X) \cdot m_2(Y), \tag{5.7}$$

$$m_3(\Theta) = m_1(\Theta) \cdot m_2(\Theta) + \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X) \cdot m_2(Z). \tag{5.8}$$

În cazul exemplului propus de Zadeh, vom avea:

$m_3(\{M\}) = 0$

$m_3(\{C\}) = 0$

$m_3(\{T\}) = 0{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}0001$

$m_3(\Theta) = 0 + (0{,}9801 + 0{,}0099 + 0{,}0099) = 0{,}9999.$

Pentru exemplul cu cele două raportări ale demonstrației, atunci când evidențele coincid (ambele surse raportează o demonstrație mare), rezultatele sunt identice cu cele ale regulii lui Dempster, întrucât numitorul pentru normalizare este 1:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

X	$m_3(X)$	Y	$m_4(Y)$	$\cap$	$\times$
{Mare}	0,8	{Mare}	0,6	{Mare}	0,48
{Mare}	0,8	Θ	0,4	{Mare}	0,32
Θ	0,2	{Mare}	0,6	{Mare}	0,12
Θ	0,2	Θ	0,4	Θ	0,08

Prin urmare:

$m_3(\{Mare\}) = 0{,}48 + 0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}92$

$m_3(\Theta) = 0{,}08 + 0 = 0{,}08.$

Când evidenţele diferă, vom avea situaţia de mai jos:

X	$m_3(X)$	Y	$m_4(Y)$	$\cap$	$\times$
{Mare}	0,8	{Mică}	0,6	Ø	0,48
{Mare}	0,8	Θ	0,4	{Mare}	0,32
Θ	0,2	{Mică}	0,6	{Mică}	0,12
Θ	0,2	Θ	0,4	Θ	0,08

şi deci:

$m_3(\{Mare\}) = 0{,}32$

$m_3(\{Mică\}) = 0{,}12$

$m_3(\Theta) = 0{,}08 + 0{,}48 = 0{,}56.$

În consecinţă, convingerile şi plauzibilităţile se modifică:

$\text{Bel}(\{Mare\}) = 0{,}32$

$\text{Pl}(\{Mare\}) = 1 - \text{Bel}(\{Mică\}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Intervalele de încredere sunt acum:

{*Mare*}: [0,32, 0,88] față de [0,62, 0,77] după regula lui Dempster;
{*Mică*}: [0,12, 0,68] față de [0,23, 0,38] după regula lui Dempster.

În cazul rezultatelor folosind regula lui Yager, se poate observa că diferența dintre convingere şi plauzibilitate este egală cu masa de convingeri de bază atribuită mulțimii Θ.

5.3.2. Regula Han-Han-Yang

În acest caz, formula de combinare a două evidențe este următoarea (Han, Han & Yang, 2008):

$$m_3(Z) = \sum_{X \cap Y = Z} m_1(X) \cdot m_2(Y) + w_1 \cdot \sum_{Z \cap A = \emptyset} m_1(Z) \cdot m_2(A) + w_2 \cdot \sum_{B \cap Z = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(Z), \quad (5.9)$$

unde w_1 şi w_2 se calculează ca mai jos.

Vom introduce *funcția de probabilitate pignistică* (în latină „pignus" însemnând pariu), care defineşte probabilitățile pe care o persoană rațională le atribuie unor opțiuni atunci când trebuie să ia o decizie, de exemplu să facă un pariu (Smets & Kennes, 1994):

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$B_i(A) = \sum_{T \subseteq \Theta} m_i(T) \cdot \frac{|A \cap T|}{|T|} \tag{5.10}$$

Entropia definită de valorile funcţiei este:

$$E_i = -\sum_{\theta \in \Theta} B_i(\theta) \cdot \log_2(B_i(\theta)) \tag{5.11}$$

Astfel, se definesc ponderile celor două evidenţe care se combină:

$$w_1 = \frac{e^{-E_1}}{e^{-E_1} + e^{-E_2}} \tag{5.12}$$

$$w_2 = 1 - w_1 \tag{5.13}$$

Pentru exemplul propus de Zadeh, vom avea:

$$m_3(\{M\}) = 0 + w_1 \cdot (0{,}9801 + 0{,}0099) + w_2 \cdot 0$$

$$\{\underline{M}\} \cap \{C\} = \emptyset \qquad \{\underline{M}\} \cap \{T\} = \emptyset$$

$$m_3(\{C\}) = 0 + w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot (0{,}9801 + 0{,}0099)$$

$$\{M\} \cap \{\underline{C}\} = \emptyset \qquad \{T\} \cap \{\underline{C}\} = \emptyset$$

$$m_3(\{T\}) = 0{,}0001 + w_1 \cdot 0{,}0099 + w_2 \cdot 0{,}0099$$

$$\{\underline{T}\} \cap \{C\} = \emptyset \qquad \{M\} \cap \{\underline{T}\} = \emptyset$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$B_1(M) = m_1(T) \cdot \frac{|M \cap T|}{|T|} = 0{,}01 \cdot \frac{0}{1} = 0$$

$$B_1(T) = m_1(T) \cdot \frac{|T \cap T|}{|T|} = 0{,}01$$

Analog,

$$B_2(C) = m_2(T) \cdot \frac{|C \cap T|}{|T|} = 0$$

$$B_2(T) = m_2(T) \cdot \frac{|T \cap T|}{|T|} = 0{,}01$$

În acest caz, este clar că $E_1 = E_2$ şi deci $w_1 = w_2 = 0{,}5$.
Prin urmare:

$$m_3(\{M\}) = 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}99 = 0{,}495$$
$$m_3(\{C\}) = 0{,}495$$
$$m_3(\{T\}) = 0{,}01$$

Pentru exemplul cu demonstraţia despre care o sursă spune că a fost mare şi cealaltă spune că a fost mică, vom avea:

$$m_3(\{Mare\}) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + w_1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6$$
$$m_3(\{Mică\}) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 + w_2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$B_1(\{Mare\}) = m_1(\{Mare\}) \cdot 1 + m_1(\{Mică\}) \cdot 0 = 0{,}8$$
$$B_2(\{Mică\}) = m_2(\{Mică\}) \cdot 1 + m_2(Mare) \cdot 0 = 0{,}6$$

$$E_1 = -(0{,}8 \cdot \log_2 0{,}8) = 0{,}3798$$
$$E_2 = -(0{,}6 \cdot \log_2 0{,}6) = 0{,}6521$$

$$w_1 = \frac{e^{-0{,}3798}}{e^{-0{,}3798} + e^{-0{,}6521}} = 0{,}568$$
$$w_2 = 1 - 0{,}568 = 0{,}432$$

Prin urmare:

$m_3(\{Mare\}) = 0{,}593$
$m_3(\{Mică\}) = 0{,}327$
$m_3(\Theta) = 0{,}08$

Intervalele de încredere sunt:

$\{Mare\}$: [0,593, 0,673]
$\{Mică\}$: [0,327, 0,407].

Diferența dintre cele două valori este şi aici egală cu $m_3(\Theta)$.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

5.4. Concluzii

Aplicând regula de combinare a lui Dempster, ordinea în care apar informaţiile influenţează rezultatul. Există reguli de combinare alternative neinfluenţate de acest aspect.

Într-un studiu privind combinarea informaţiilor oferite de o mulţime de senzori (engl. "sensor fusion"), s-a constatat că regula lui Yager a dat cele mai bune rezultate în comparaţie cu alte reguli (Seo & Sycara, 2006).

Există şi alte modalităţi de combinare a evidenţelor, însă avantajele oferite pentru majoritatea problemelor practice sunt discutabile, având în vedere menţinerea unui echilibru între complexitatea calculelor şi credibilitatea rezultatelor.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Partea a II-a

Tehnici de clasificare

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 6

Problematica generală

6.1. Introducere

Dincolo de aplicațiile practice ale tehnicilor de clasificare ce urmează a fi prezentate, acestea au o foarte mare importanță pentru că dau o imagine asupra modului în care gândeşte omul în relația cu mediul înconjurător. Mediul fiind foarte complex, creierul trebuie să selecteze anumite informații, construind modele pentru a reduce numărul şi diversitatea stimulilor. Clasificarea (sau categorizarea) stabileşte clase care includ un grup de obiecte cu atribute comune. Modul în care creierul prelucrează informațiile din mediu nu este unitar, având părți componente diferite care lucrează diferit. Pentru unele aspecte creăm modele bazate pe reguli explicite (de exemplu, „dacă semaforul este roşu, atunci trebuie să aşteptăm"). În alte situații, lucrăm prin analogie. Poate nu ştim exact regula după care se clasifică un măr ca fiind măr, dar implicit ştim că un anumit obiect este apropiat ca şi culoare, formă sau dimensiuni față de un prototip de măr, cunoscut. Când aplicăm analogii cu situații întâlnite sau aspecte văzute anterior, uneori este greu să explicăm exact de ce. Am putea, însă ar trebui să depunem un efort, deoarece are loc un proces de căutare pentru a extrage reguli explicite din modelul bazat pe analogie. Regulile sunt verbalizabile, de aceea sunt în general mai concise pentru a fi înțelese şi reținute. Clasificarea prin similaritate poate lua în calcul, în mod implicit, un număr mai mare de aspecte. Mai există şi abordarea probabilistică întrucât

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

dăm importanţă mai mare de obicei lucrurilor care se întâmplă mai frecvent. Toate aceste metode reflectă modalităţi diferite pe care le foloseşte omul în propriul raţionament.

Tehnicile de *învăţarea automată* (engl. "machine learning") aparţin tipului de raţionament inductiv. Învăţăm din mediu şi încercăm să tragem nişte concluzii generale pe baza a ceea ce experimentăm practic. Nu avem o teorie generală, avem doar date provenite din experienţă şi încercăm să conturăm un model general, dacă el există.

După ce este găsit şi verificat un astfel de model, se poate aplica raţionamentul deductiv, de exemplu aplicarea unei teoreme cunoscute la un caz concret. Acum direcţia de raţionament este inversă, de la cazul general la cazul particular pe care dorim să îl rezolvăm.

Din punct de vedere practic, învăţarea automată este motivată de faptul că un sistem clasic specializat dar care nu învaţă de obicei realizează calcule numeroase pentru rezolvarea unei probleme, însă nu memorează soluţia şi de aceea, de fiecare dată când are nevoie de soluţie, realizează aceeaşi secvenţă de calcule complexe. Dacă nu învaţă, comportamentul (calculele) se repetă de fiecare dată.

Învăţarea înseamnă modul în care se schimbă sistemul, astfel încât să rezolve aceeaşi problemă mai eficient (cu performanţe superioare sau cu mai puţine resurse), dar şi alte probleme diferite, deşi asemănătoare (definiţie adaptată după Simon, 1983). Sistemul trebuie să generalizeze pentru a putea rezolva probleme noi.

De asemenea, putem spune că un sistem învaţă dacă îşi îmbunătăţeşte performanţele la îndeplinirea unei sarcini pe baza experienţei, din punct de vedere al costurilor sau al calităţii (definiţie adaptată după Mitchell, 1997).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Modelele sunt antrenate cu nişte date, însă apoi sunt aplicate pe alte date, noi. Dacă nu am face aşa, ar fi suficientă stocarea propriu-zisă a răspunsurilor, echivalentă cu învățarea pe de rost.

6.2. Învăţarea supervizată

Învățarea supervizată presupune învățarea unei ipoteze, aproximarea unei funcții, în sensul cel mai larg (funcția nu trebuie să fie neapărat reală, poate fi de exemplu şi dacă cineva îşi plăteşte un credit luat de la bancă sau nu).

Fie f funcția țintă. Datele cunoscute sunt nişte exemple, nişte eşantionări ale funcției, o mulțime de perechi $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$.

Scopul este găsirea unei ipoteze h astfel încât $h \approx f$, pentru toate elementele mulțimii de exemple de antrenare.

Dacă valorile funcției sunt reale, discutăm despre o problemă de *regresie*. Dacă valorile funcției sunt discrete, discutăm despre o problemă de *clasificare*.

Acest tip de învățare se numeşte „supervizată" deoarece pentru fiecare instanță se cunoaşte valoarea funcției $f(\mathbf{x})$, pe lângă valorile vectorului de intrare $\mathbf{x}$.

Să considerăm o funcție reală, pentru care cunoaştem punctele din tabelul 6.1.

Tabelul 6.1. *Exemplu de funcţie eşantionată pentru regresie*

x	f(x)
0,50	0,25
1,00	1,00
1,50	0,50
2,00	4,00

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

În cazul regresiei, problema este găsirea unei funcții de interpolare. De exemplu, putem folosi o funcție liniară (figura 6.1). Desigur, avem erori.

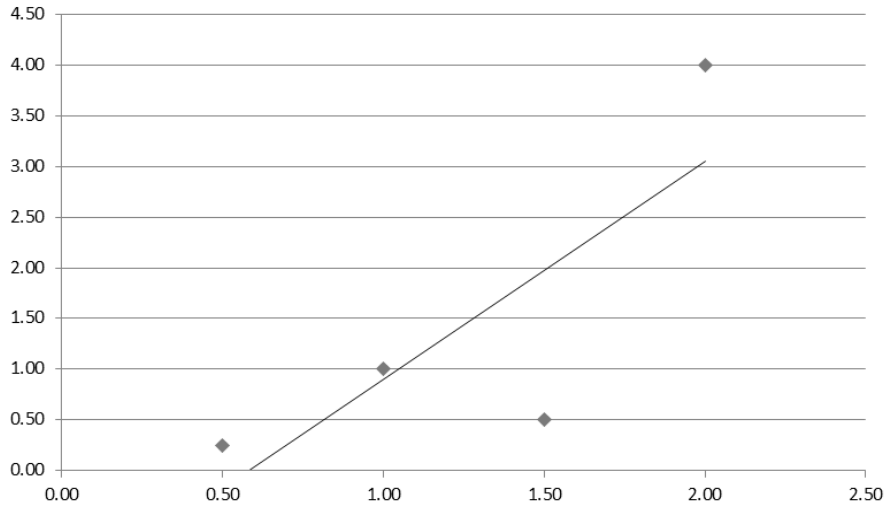


Figura 6.1. *Regresie cu o funcție liniară*

Putem folosi o funcție polinomială de gradul 2 (figura 6.2).

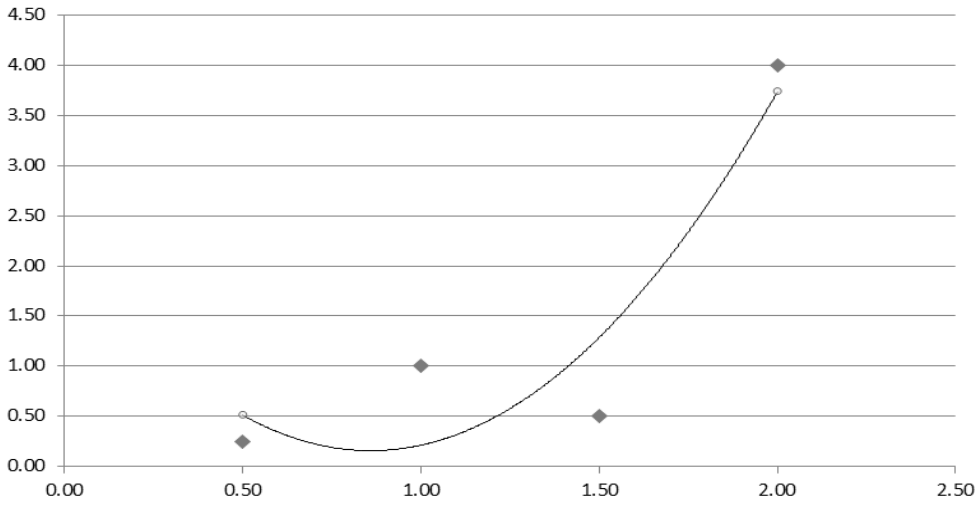


Figura 6.2. *Regresie cu o funcție polinomială de gradul 2*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Putem folosi o funcție polinomială de gradul 3 (figura 6.3).

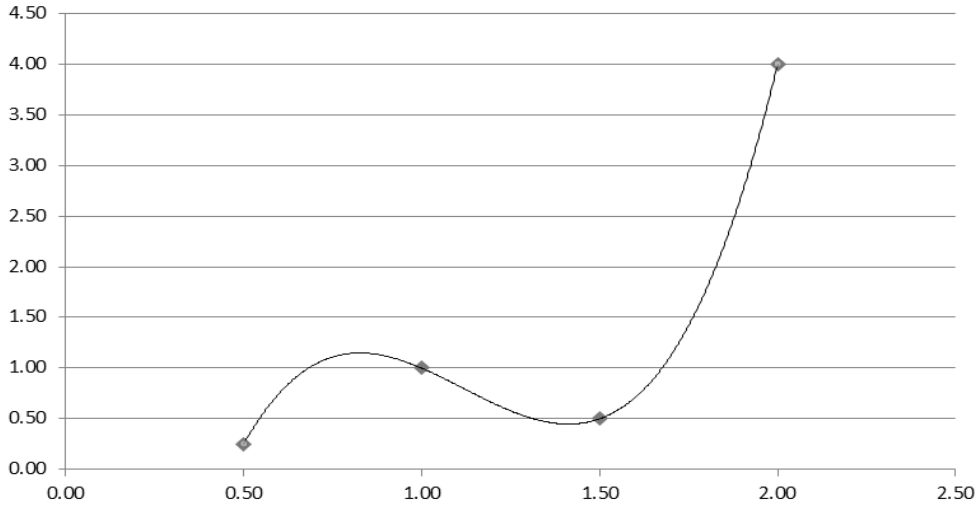


Figura 6.3. *Regresie cu o funcţie polinomială de gradul 3*

De asemenea, putem folosi o funcție polinomială de grad mai mare (figura 6.4).

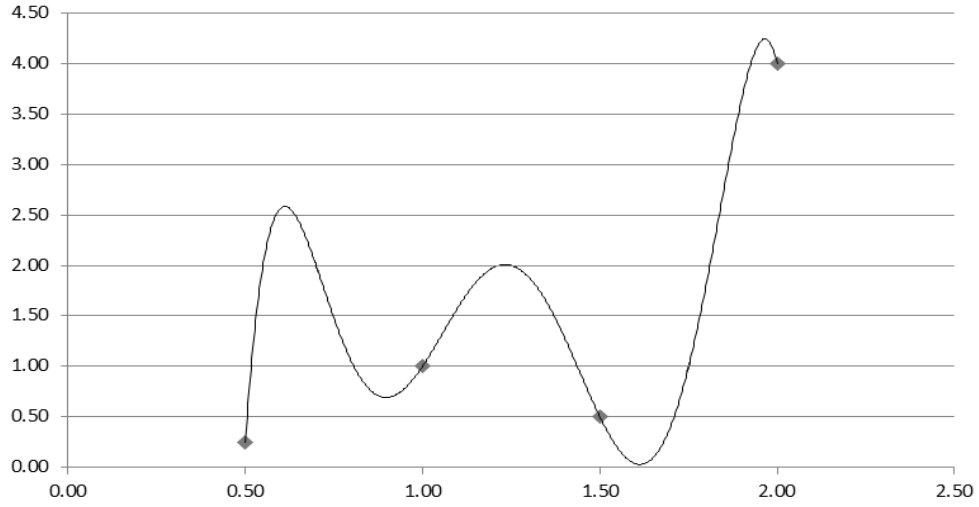


Figura 6.4. *Regresie cu o funcţie polinomială de gradul 6*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Funcțiile date de polinoamele de grad 1 şi 2 sunt prea simple, dar de la gradul 3 în sus, toate funcțiile trec prin punctele specificate. Problema este următoarea: care este cea mai bună interpolare?

O recomandare în acest sens este *briciul lui Occam*. Occam a fost un călugăr franciscan englez care a trăit în secolul al XIV-lea şi a propus *legea economiei* (lat. „lex parsimoniae"): entitățile nu trebuie multiplicate dincolo de necesitate.

Ideea de bază este că la egalitate, când mai multe modele au aceleaşi performanțe, trebuie preferat modelul mai simplu. Cu alte cuvinte, nu trebuie să complicăm lucrurile fără rost.

Pentru exemplele de mai sus, briciul lui Occam ar recomanda utilizarea polinomului de gradul 3, deoarece este cel mai simplu model care trece corect prin toate punctele.

Un model prea complicat conduce la fenomenul de *suprapotrivire* (engl. "overfitting"). Trece foarte bine prin punctele date, dar pentru punctele intermediare nu se comportă foarte bine.

Briciul lui Occam este un principiu util, însă nu trebuie aplicat mecanic. De exemplu, există algoritmul *AdaBoost* (Freund & Schapire, 1995), care este o modalitate de a transforma orice algoritm de clasificare slab într-un clasificator puternic (spunem că este un meta-algoritm). Ideea de bază este executarea mai multor runde de clasificare. În fiecare rundă, este aplicat clasificatorul slab şi se determină instanțele clasificate greşit. Acestora li se dă o pondere mai mare în următoarea rundă de clasificare. Rezultă o serie de clasificatori, fiecare cu anumite ponderi, care în final dau câte un vot proporțional cu ponderea pentru clasificarea unei noi instanțe. În acest caz, creşterea numărului de runde, echivalentă cu creşterea

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

complexității modelului, în general nu determină scăderea capacității de generalizare.

Prin urmare, briciul lui Occam este o euristică, nu o lege fundamentală.

6.3. Definirea unei probleme de clasificare

În continuare, ne vom concentra asupra problemelor de clasificare, mai apropiate de modul în care omul prelucrează informațiile. Trebuie spus totuşi că şi problemele de regresie sunt foarte importante din punct de vedere matematic şi pentru numeroare aplicații din lumea reală.

În general, structura unei probleme de clasificare este definită de un tabel de tipul tabelului 6.2. Aici este prezentat un exemplu adaptat după Quinlan (1986) pe care îl vom folosi pentru a descrie toate metodele de clasificare din capitolele următoare. Se pune problema de a determina dacă în funcție de condițiile meteorologice se poate juca sau nu golf.

Tabelul 6.2. *Problemă de clasificare*

Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
Soare	Mare	Mare	Absent	Nu
Soare	Mare	Mare	Prezent	Nu
Înnorat	Mare	Mare	Absent	Da
Ploaie	Medie	Mare	Absent	Da
Ploaie	Mică	Normală	Absent	Da
Ploaie	Mică	Normală	Prezent	Nu
Înnorat	Mică	Normală	Prezent	Da
Soare	Medie	Mare	Absent	Nu
Soare	Mică	Normală	Absent	Da
Ploaie	Medie	Normală	Absent	Da
Soare	Medie	Normală	Prezent	Da
Înnorat	Medie	Mare	Prezent	Da
Înnorat	Mare	Normală	Absent	Da
Ploaie	Medie	Mare	Prezent	Nu

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Pe linii avem *instanţele*, care se cunosc şi în baza cărora se realizează modelul de clasificare. Pentru problema de față, sunt situații din trecut, pentru care ştim dacă s-a putut juca sau nu golf. Tabelul întreg reprezintă *mulțimea de antrenare*.

Coloanele reprezintă *atributele*, care au *valori*. Instanțele sunt identificate de valorile atributelor. De exemplu, atributul *Umiditate* are două valori: *Normală* şi *Mare*. Prima instanță este definită de valorile: { *Starea vremii = Soare*, *Temperatură = Mare*, *Umiditate = Mare*, *Vânt = Absent*, *Joc = Nu* }.

De obicei, ultimul atribut este *clasa*. În exemplul nostru, clasa este *Joc*.

Funcția generică de care discutam mai sus şi care trebuie aproximată este aici: $h(\mathbf{x}) \approx$ *Joc*(*Starea vremii*, *Temperatură*, *Umiditate*, *Vânt*).

Pe baza acestor date simple, dorim să identificăm cunoştințe, adică modele mai generale şi mai abstracte. Dacă la un moment dat ştim condițiile meteorologice, aplicând modelul general putem determina dacă este bine să jucăm sau nu golf.

6.4. Tipuri de atribute

Există patru tipuri de atribute, organizate pe două coordonate:

- Atribute *discrete* (*simbolice*): de tip *nominal* şi *ordinal*;
- Atribute *continue* (*numerice*): de tip *interval* şi *rațional*.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Atribute discrete

Între valorile unui atribut nominal nu există o relație. Exemple de astfel de atribute sunt: culoarea ochilor (dacă nu o considerăm ca RGB), numele, sexul, CNP-ul ca obiect (nu ordonat ca număr), numerele de pe tricourilor unor jucători de fotbal, o mulțime de țări etc.

Valorile atributelor ordinale sunt simbolice, însă între ele există relații de ordine, de exemplu înălțimea unei persoane discretizată în categoriile mică, medie şi mare, în general, orice atribut ale cărui valori are sens să le considerăm în astfel de categorii (foarte mic, mic, mediu, mare, foarte mare etc.). Rangurile (primul, al doilea, al treilea), calificativele (satisfăcător, bine, foarte bine, excelent) sunt de asemenea atribute ordinale.

Există mici diferențe de tratare a atributelor nominale față de cele ordinale, mai ales la algoritmii bazați pe instanțe, prezentați în capitolul 9.

Atribute continue

Exemple de atribute de tip interval sunt: data calendaristică, temperatura în grade Celsius, nivelul de încredere într-o personalitate publică pe o scară de la 1 la 5 etc. Exemple de atribute raționale sunt: lungimea, distanța, greutatea, prețurile, temperatura în grade Kelvin etc.

Diferența dintre cele două tipuri este următoarea. „Rațional” vine de la „ratio”, care exprimă o fracție. În limba latină, „ratio” înseamnă atât judecată cât şi calcul. Putem spune că o distanță de 2 km este de 2 ori mai mare decât o distanță de 1 km. Putem calcula un raport între aceste valori. La fel la prețuri: 10 lei este de 2 ori mai mult decât 5 lei. Pentru temperatura în grade Kelvin există 0 absolut. La atributele de tip interval, chiar dacă sunt continue, nu putem face acest tip de operație. De exemplu, o temperatură de 20 de grade Celsius nu este de 2 ori mai mare decât una de 10 grade şi nu

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

are sens un raport de -2 între 20ºC şi -10ºC. De asemenea, pentru datele calendaristice, nu putem face un raport între 1 martie 2010 şi 1 februarie 2010.

Din punct de vedere al algoritmilor, nu prea există diferențe de prelucrare a atributelor de tip interval şi a celor de tip rațional. Toate atributele continue pot fi tratate la fel. De exemplu, putem transforma o dată calendaristică într-un număr întreg care să specifice diferența în zile față de o anumită dată de referință.

Unii algoritmi sunt mai potriviți pentru un anumit tip de atribute. Pentru arborii de decizie (capitolul 7) şi clasificarea bayesiană naivă (capitolul 8) am prefera să avem date discrete. Atributele continue pot fi discretizate, însă prin această transformare se pot pierde informații. Algoritmii bazați pe instanțe (capitolul 9), dimpotrivă, tratează în mod natural valori continue ale atributelor.

6.5. Estimarea capacităţii de generalizare

După realizarea modelului, este foarte importantă determinarea capacității sale de generalizare. De obicei, avem o singură mulțime de date. Pentru estimarea capacității de generalizare, împărțim datele existente într-o parte cu care să construim modelul (*mulțimea de antrenare*) şi o parte pe care să îl verificăm (*mulțimea de validare* sau *de test*).

Există mai multe metode de a împărți datele în aceste două mulțimi.

Cea mai simplă este *împărțirea 2/3 – 1/3*. Două treimi din date se folosesc pentru antrenare iar restul de o treime pentru testarea modelului construit.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Cea mai folosită metodă este *validarea încrucişată* (engl. "cross-validation"), în care împărţim instanţele în *n* grupuri. De exemplu, dacă avem 100 de instanţe, le împărţim în 10 grupuri de câte 10. Construim modelul pe *n*-1 grupuri (de exemplu pe 90 de instanţe) şi îl testăm pe grupul rămas. Apoi se schimbă grupul rămas pentru testare, se repetă procedura de *n* ori şi se calculează rata medie de eroare.

Rata de eroare este raportul dintre numărul de instanţe clasificate greşit şi numărul total de instanţe considerate pentru un test.

O altă metodă, utilă mai ales atunci când există un număr mic de date, este aşa numita *lasă una deoparte* (engl. "leave one out"). Dacă avem 10 instanţe, construim modelul cu 9 instanţe şi îl verificăm cu a zecea, apoi schimbăm instanţa rămasă pentru test şi repetăm procesul de 10 de ori. Se calculează apoi rata de eroare medie a algoritmului pentru instanţa de test, adică de câte ori este clasificată corect, în medie. În această situaţie, cu doar 10 instanţe, împărţirea 2/3 – 1/3 ar conduce la utilizarea a 7 instanţe pentru antrenare. În schimb, cu această metodă putem utiliza 9 instanţe.

Când folosim o mulţime de antrenare şi una de test, rezultatele clasificării instanţelor de test sunt de obicei mai proaste decât dacă am folosi toate datele disponibile pentru antrenare. Trebuie să subliniem totuşi faptul că scopul principal al clasificării nu este aproximarea perfectă a datelor de antrenare, care s-ar putea face şi prin simpla memorare a acestora, ci crearea unui model care să se comporte bine pentru date noi.

Discutând despre capacitatea de generalizare, două noţiuni sunt foarte importante:

- *Sub-potrivirea* (engl. "underfitting"): ipoteza este prea simplă şi nu poate învăţa modelul din date;

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

- *Supra-potrivirea* (engl. "overfitting"): ipoteza este prea complexă şi este influențată de zgomot şi date irelevante.

Dacă un model este prea simplu, cum era exemplul de regresie cu funcția liniară, acesta nu poate să învețe datele. Oricum am orienta dreapta respectivă, ea nu poate trece prin toate punctele.

Dimpotrivă, un model suprapotrivit are performanțe foarte bune pe mulțimea de antrenare, dar performanțe slabe pe mulțimea de validare. Este cazul funcției polinomiale de gradul 6 din figura 6.4. De asemenea, datele de antrenare ar putea fi afectate de zgomot (pot apărea erori de măsurare, greşeli umane de transcriere, clasificări incorecte ale experților etc.). Mai ales în astfel de cazuri, un model mai „suplu" poate scădea influența datelor eronate, conducând la predicții mai bune.

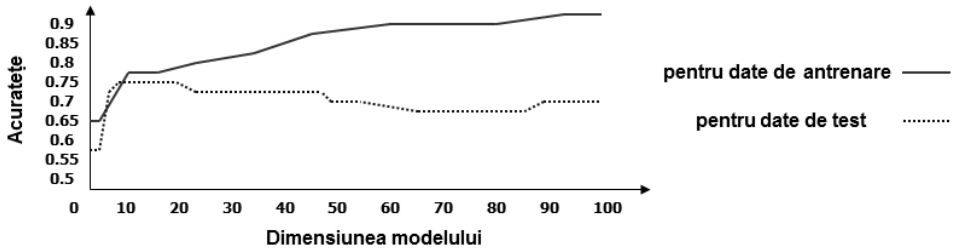


Figura 6.5. *Evoluția acurateței pe măsura creşterii complexității modelului*

Atunci când creşte complexitatea modelului, la început de multe ori acuratețea (1 minus rata de eroare) pentru mulțimile de antrenare şi de test creşte constant, deoarece modelul reuşeşte să potrivească datele din ce în ce mai bine. La un moment dat, există un *punct de maximă generalizare*, după care modelul începe să supra-potrivească, să fie mai complex decât ar

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

trebui. Performanţele pentru datele de antrenare continuă să crească, însă performanţele pentru datele de test încep să scadă. În acest punct ar trebui să oprim dezvoltarea modelului, în care acurateţea pentru mulţimea de validare este maximă, chiar dacă am putea obţine performanţe mai bune pe mulţimea de antrenare continuând procesul (figura 6.5).

6.6. Aplicaţii ale tehnicilor de clasificare

Există numeroase aplicaţii pentru algoritmii de clasificare:

- Învăţarea tratamentelor optime din înregistrările medicale. Există multe înregistrări cu pacienţi care au primit diferite tratamente pentru anumite simptome şi se cunoaşte dacă medicamentele respective au funcţionat sau nu. Când trebuie tratat un nou pacient, cu anumite simptome şi caracteristici (vârstă, sex, greutate, alte boli cunoscute etc.), se poate estima dacă o anumită schemă de tratament va funcţiona sau nu;
- Clasificarea celulelor din tumori ca benigne sau maligne pe baza radiografiilor;
- Predicţia ratei de recuperare a pacienţilor cu pneumonie;
- Clasificarea structurilor secundare ale proteinelor. Conformaţia unei proteine este determinată de secvenţa sa de aminoacizi. În urma secvenţierii ADN-ului uman, a apărut o cantitate uriaşă de date liniare (şiruri de baze nucleice). În prezent, se depun eforturi ca din aceste şiruri să se extragă structura lor spaţială (secundară), astfel încât pasul următor să fie predicţia proprietăţilor pe baza componentelor structurale;

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

- Clasificarea plăților electronice ca legitime sau frauduloase. Având în vedere cheltuielile tipice ale unei persoane, se poate determina un profil şi astfel se poate verifica dacă o plată de la un anumit moment este similară cu cele anterioare;
- Recunoaşterea vorbirii, echivalentă cu clasificarea secvențelor de sunete în cuvinte;
- Recunoaşterea optică a caracterelor, ce presupune identificarea caracterelor dintr-o imagine;
- Clasificarea textelor. În acest caz, atributele sunt chiar cuvintele documentelor respective (după filtrarea cuvintelor uzuale – conjuncții, prepoziții, pronume – şi eliminarea inflexiunilor) iar valorile atributelor sunt frecvențele de apariție ale acestora. Exemple sunt clasificarea ştirilor în categorii precum politică, meteo, sport etc. sau clasificarea email-urilor în "spam" (mesaje nedorite) şi "ham" (mesaje legitime).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 7

Arbori de decizie

7.1. Algoritmul lui Hunt

Algoritmul lui Hunt (1962) este o procedură generică pentru construirea unui arbore de decizie. Inițial, toate instanțele din mulțimea de antrenare corespund rădăcinii arborelui. Ideea de bază este partiționarea fiecărui nod, adică împărțirea instanțelor în mai multe grupe, corespunzătoare fiilor nodului curent, astfel încât nodurile rezultate să fie cât mai omogene, adică toate instanțele din acel nod, sau majoritatea lor, să aparțină aceleiaşi clase. Într-o frunză, omogenitatea ar trebui să fie maximă, adică toate instanțele să aparțină aceleiaşi clase. Desigur, în anumite cazuri este imposibilă obținerea unor frunze perfect omogene, ceea ce conduce la apariția erorilor de clasificare. După partiționarea unui nod, rezultă mai multe noduri fiu, pe care le partiționăm în mod recursiv după acelaşi criteriu.

Mai formal, fie D_n mulțimea instanțelor de antrenare dintr-un nod n. Algoritmul lui Hunt are următorii paşi (Tan, Steinbach & Kumar, 2006):

- Dacă D_n conține instanțe din aceeaşi clasă y_n, atunci n este o frunză etichetată y_n;
- Dacă D_n este o mulțime vidă, atunci n este o frunză etichetată cu clasa implicită (engl. "default") y_d;

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

- Dacă D_n conține instanțe care aparțin mai multor clase, se utilizează un test de atribute pentru a partiționa datele în mulțimi mai mici;
- Se aplică recursiv procedura pentru fiecare submulțime.

Se poate observa că algoritmul lui Hunt recomandă o strategie greedy, deoarece se partiționează mulțimea de instanțe cu un test care maximizează la un moment dat un anumit criteriu, cum ar fi omogenitatea nodurilor fiu rezultate.

Cheia este identificarea testului de atribute pe care se bazează partiționările. Algoritmul lui Hunt nu spune nimic despre natura acestuia. După cum vom vedea, există numeroase metode de inducție a arborilor de decizie, care diferă prin modalitatea de determinare a testul de atribute, pe lângă alte proceduri suplimentare de optimizare a rezultatelor.

7.2. Specificarea testelor de atribute

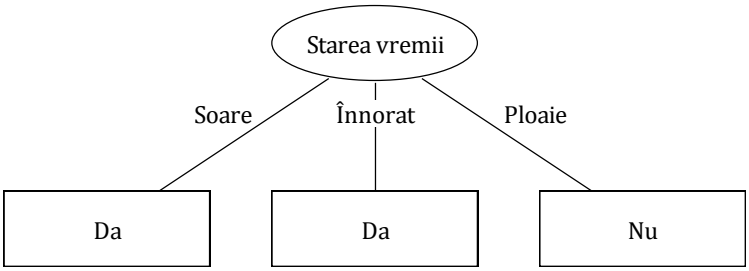
Partiționarea datelor presupune în primul rând specificarea testului şi apoi, în funcție de acesta, determinarea partiționării optime a unui nod. Partiționările sunt diferite în funcție de tipul atributelor.

Pentru un atribut nominal, putem partiționa nodul după fiecare valoare a atributului. Când avem mai multe valori discrete, creăm câte un fiu pentru fiecare valoare a atributului respectiv. Pentru a exemplifica, vom considera o variantă simplificată a problemei de clasificare introduse în capitolul 6, cu un singur atribut nominal şi clasa.

Starea vremii	Joc
Soare	Da
Înnorat	Da
Ploaie	Nu

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

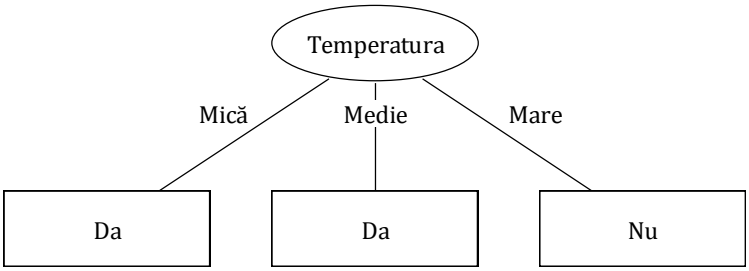
Atributul *Starea vremii* are 3 valori, deci vor rezulta 3 frunze corespunzătoare acestor valori.



Teoretic, am putea grupa valorile într-un număr mai mic de mulțimi, pentru a avea o frunză *Da* pentru valorile { *Soare*, *Înnorat* } şi una *Nu* pentru { *Ploaie* } însă în cazul general aceasta este o problemă de căutare şi optimizare.

Pentru atribute ordinale, procedura este similară: putem face partiționarea pentru fiecare valoare a atributului.

Temperatură	**Joc**
Mică	Da
Medie	Da
Mare	Nu



Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Relația de ordine ne-ar putea ajuta, pentru că am putea grupa valorile adiacente, de exemplu { *Mică*, *Medie* } şi { *Mare*}. O partiționare după { *Mică*, *Mare* } şi { *Medie* } este mai puțin intuitivă, dar nu incorectă, deoarece datele de antrenare ar putea fi de tipul:

Temperatură	Joc
Mică	Nu
Medie	Da
Mare	Nu

La atributele continue, într-o primă abordare, ar trebui discretizate valorile, deoarece numărul de fii ai unui nod este întreg, nu real.

O primă metodă de discretizare este sortarea valorilor, stabilirea unui număr de intervale egale (histograma) şi introducerea valorilor în aceste intervale.

Umiditate	Joc
65	Da
70	Da
72	Da
75	Da
80	Da
85	Da
86	Nu
90	Nu
90	Nu
91	Nu
93	Nu
95	Nu

Să considerăm discretizarea în 3 intervale. Valorile numerice sunt distribuite în domeniul [65, 95], prin urmare vom considera următoarele intervale egale: [65, 75], (75, 85], respectiv (85, 90]. Atributul continuu va fi transformat într-unul ordinal, cu valorile *Mică*, *Medie* şi *Mare*:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Umiditate-Dis1	Joc
Mică	Da
Mică	Da
Mică	Da
Mică	Da
Medie	Da
Medie	Da
Mare	Nu
Mare	Nu
Mare	Nu
Mare	Nu
Mare	Nu
Mare	Nu

O altă metodă de discretizare este cea cu frecvenţe egale, astfel încât fiecare interval să conţină un număr egal de valori. Nu mai contează mărimea valorilor, ci numărul lor.

Pentru exemplul de mai sus, cu 12 valori, primele 4 vor primi valoarea *Mică*, următoarele 4 – valoarea *Medie* şi ultimele 4 – valoarea *Mare*.

Umiditate-Dis2	Joc
Mică	Da
Mică	Da
Mică	Da
Mică	Da
Medie	Da
Medie	Da
Medie	Nu
Medie	Nu
Mare	Nu
Mare	Nu
Mare	Nu
Mare	Nu

O a treia modalitate este prin clusterizare (engl. “clustering”), care realizează o grupare mai naturală a valorilor. Clusterizarea aparţine tipului

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

de *învățare nesupervizată*, deoarece acolo nu mai cunoaştem valoarea „clasei" după care se face gruparea. Se dau doar valorile propriu-zise ale celorlalte atribute şi algoritmul trebuie să grupeze instanțele astfel încât în interiorul unui grup (cluster) asemănarea instanțelor componente să fie cât mai mare, iar între clustere diferite asemănarea instanțelor să fie cât mai mică. Acest tip de învățare nu face obiectul capitolului de față, însă un algoritm simplu de clusterizare care poate fi aplicat pentru discretizarea atributelor continue pentru o problemă de clasificare este *k-means* (MacQueen, 1967).

O variantă alternativă pentru tratarea atributelor continue este partiționarea binară, adică determinarea unei singure valori cu care să se compare valorile atributului considerat. În acest caz, ar trebui tratate toate partiționările posibile şi prin urmare este necesar un efort de calcul mai mare. Pentru exemplul de mai sus, să presupunum că s-a determinat valoarea de referință 85, iar testul este specificat astfel: $(A_i \leq 85)$? Valorile atributului rezultat prin această transformare vor fi *Da* sau *Nu*:

Umiditate	Umiditate-Bin	Joc
65	Da	Da
70	Da	Da
72	Da	Da
75	Da	Da
80	Da	Da
85	Da	Da
86	Nu	Nu
90	Nu	Nu
90	Nu	Nu
91	Nu	Nu
93	Nu	Nu
95	Nu	Nu

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

7.3. Măsuri de omogenitate

Pentru a face o partiționare la un moment dat, avem nevoie de o măsură a omogenității. O astfel de măsură a impurității unui nod, este *entropia*, utilizată de algoritmii *ID3* (Iterative Dichotomiser 3, Quinlan, 1983) şi *C4.5* (Quinlan, 1993) pentru a descoperi arbori de dimensiuni cât mai reduse.

În *teoria informației* (Shannon, 1948), entropia măsoară incertitudinea asociată cu o variabilă aleatorie, care se reflectă în cantitatea de informație conținută de un mesaj. Cu cât este mai mare cantitatea de informație, cu atât entropia este mai mare.

Entropia este definită astfel:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot \log_b P(x_i), \tag{7.1}$$

unde X este o variabilă aleatorie discretă cu valorile posibile $\{x_1, \dots, x_n\}$, $P(x_i)$ este probabilitatea de apariție a valorii x_i iar b este baza logaritmului. Dacă $b = 2$, atunci unitatea de măsură a entropiei este *bitul*.

Prin convenție, când $P(x_i) = 0$, se consideră că întreg termenul $P(x_i) \cdot \log_b P(x_i)$ este 0, deoarece: $\lim_{p \to 0^+} p \log p = 0$.

În cazul problemei de clasificare, probabilitățile $P(x_i)$ sunt estimate ca frecvențe relative de apariție a valorilor x_i în mulțimea de antrenare.

Pentru 2 clase, graficul entropiei este cel din figura 7.1. Valoarea maximă este 1 când într-un nod ambele clase au un număr egal de instanțe (ambele posibilități sunt egal probabile şi au probabilitatea 1/2). Valoarea

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

minimă este 0, când toate instanțele aparțin unei singure clase: dacă aparțin primei clase, atunci $P(x_1) = 1$ și $P(x_2) = 0$, iar dacă aparțin celei de a doua clase, atunci $P(x_1) = 0$ și $P(x_2) = 1$.

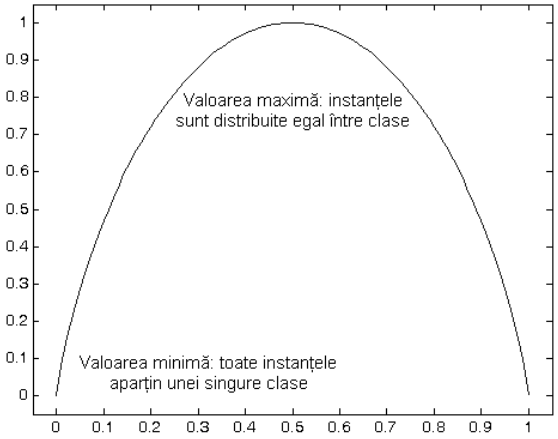


Figura 7.1. *Graficul entropiei pentru 2 clase*

Pentru 3 clase, graficul entropiei este prezentat în figura 7.2 (Lawrence, 1997).

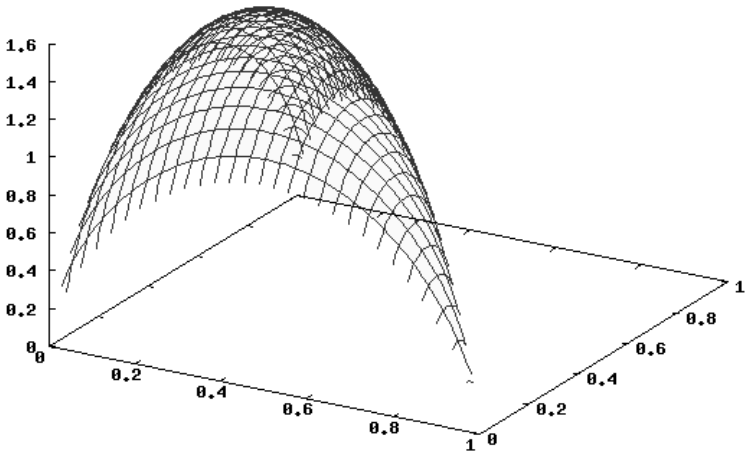


Figura 7.2. *Graficul entropiei pentru 3 clase*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

În acest caz, valoarea maximă este atunci când toate cele 3 clase au probabilități egale, de 1/3, şi în acest caz valoarea maximă este $\log_2(3) = 1{,}58$. Valoarea minimă este de asemenea 0, când o singură clasă are probabilitatea 1 iar celelalte au probabilitatea 0.

Pentru clasificare, am dori ca toate instanțele dintr-un nod să aparțină aceleiaşi clase, ceea ce corespunde minimului entropiei. Dacă entropia este mare, atunci avem un număr relativ egal de instanțe în fiecare clasă (omogenitate mică), ceea ce ne îndepărtează de scopul clasificării.

Alternativ, în locul entropiei, se poate folosi, ca în algoritmul *CART* (Breiman et al., 1984), *indexul Gini*, definit astfel:

$$G(X) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (P(x_i))^2. \tag{7.2}$$

Utilizând indexul Gini, efortul de calcul este mai mic deoarece se evită calcularea logaritmilor. Pentru 2 clase, forma indexului Gini este asemănătoare funcției de entropie, cu o valoare maximă de 0,5, după cum se poate vedea în figura 7.3.

Rezultatele obținute folosind drept criteriu de omogenitate entropia sau indexul Gini sunt de cele mai multe ori identice, mai ales când numărul de clase este mic. Diferențele apar când avem un număr mare de clase şi realizăm partiționări binare. Entropia accentuează o împărțire echilibrată astfel încât cele două noduri fiu să aibă dimensiuni apropiate, în timp ce indexul Gini favorizează partiționările care pun instanțele din clasa cea mai mare într-un singur nod pur şi instanțele din toate celelalte clase în celălalt nod fiu (Breiman, 1996).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

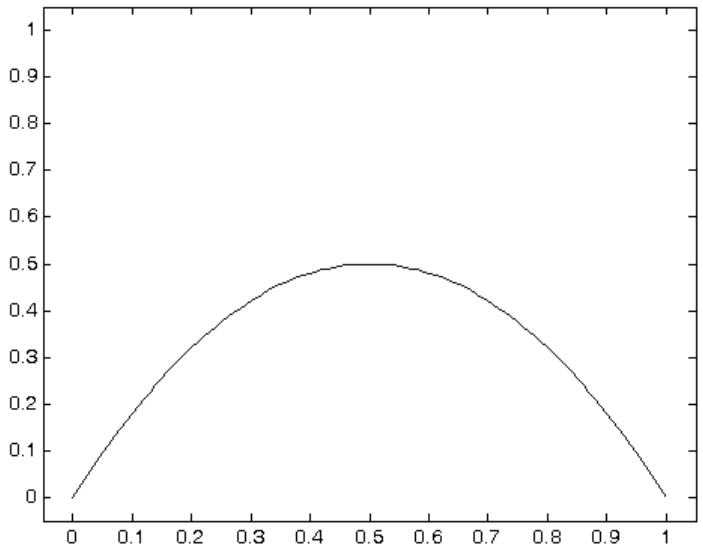


Figura 7.3. *Graficul indexului Gini pentru 2 clase*

7.4. Partiţionarea

După cum am spus, din nodul părinte, prin partiționare, trebuie să rezulte noduri cât mai omogene. Procedura prin care aplicăm criteriul de omogenitate precum entropia pentru selectarea unui atribut după care se va face partiționarea este prezentată în continuare.

Când un nod părinte p este partiționat în k fii, calitatea partiționării se calculează ca o medie ponderată a entropiilor nodurilor fiu rezultate:

$$H_s = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} \cdot H_i, \tag{7.3}$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

unde n_i este numărul de instanțe din nodul fiu i, n este numărul de instanțe din nodul părinte p, iar s este o partiționare (engl. "split") din mulțimea tuturor partiționărilor posibile.

Mai întâi se calculează entropiile tuturor nodurilor fiu rezultate H_i şi apoi se ponderează acestea cu numărul de instanțe din fiecare nod fiu.

Creşterea omogenității submulțimilor rezultate este echivalentă cu maximizarea *câştigului informațional* (engl. "information gain"):

$$\Delta_s = H_p - H_s = H_p - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} \cdot H_i. \tag{7.4}$$

Deoarece entropia nodului părinte H_p este aceeaşi pentru toate partiționările, se preferă valoarea minimă pentru sumă, astfel încât partiționarea dorită este:

$$s^* = \underset{s}{\operatorname{argmax}} \Delta_s = \underset{s}{\operatorname{argmin}} H_s = \underset{s}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{k_s} \frac{n_i}{n} \cdot H_i. \tag{7.5}$$

Numărul de noduri fiu k_s depinde de tipul şi de numărul de valori ale atributului după care se face partiționarea s, după cum am spus în secțiunea 7.2.

7.5. Probleme cu atribute simbolice

Vom considera ca exemplu problema prezentată în tabelul 7.1, cu 14 instanțe şi definită de 4 atribute simbolice şi clasa. Pentru a construi arborele

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

de decizie după algoritmul *ID3*, detaliat mai sus, mai întâi trebuie să partiționăm întreaga mulțime de antrenare, pe rând, după fiecare atribut, şi să determinăm cea mai bună partiționare. Coloana *Nr. instanță* nu face parte din problemă şi a fost inclusă doar pentru a urmări mai uşor prelucrările efectuate.

Tabelul 7.1. *Problemă de clasificare cu atribute simbolice*

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
1	Soare	Mare	Mare	Absent	Nu
2	Soare	Mare	Mare	Prezent	Nu
3	Înnorat	Mare	Mare	Absent	Da
4	Ploaie	Medie	Mare	Absent	Da
5	Ploaie	Mică	Normală	Absent	Da
6	Ploaie	Mică	Normală	Prezent	Nu
7	Înnorat	Mică	Normală	Prezent	Da
8	Soare	Medie	Mare	Absent	Nu
9	Soare	Mică	Normală	Absent	Da
10	Ploaie	Medie	Normală	Absent	Da
11	Soare	Medie	Normală	Prezent	Da
12	Înnorat	Medie	Mare	Prezent	Da
13	Înnorat	Mare	Normală	Absent	Da
14	Ploaie	Medie	Mare	Prezent	Nu

Să considerăm mai întâi atributul *Starea vremii* (*S*), care are 3 valori: *Soare*, *Înnorat* şi *Ploaie*. Dacă se partiționează nodul rădăcină după acest atribut, vor rezulta 3 noduri fiu, câte unul pentru fiecare valoare. Trebuie să determinăm entropia acestor noduri potențiale.

Pentru valoarea *Soare* (*S*), nodul rezultat va avea 2 instanțe din clasa *Da* şi 3 din clasa *Nu*.

Nr. instanţă	Starea vremii	Joc
1	Soare	Nu
2	Soare	Nu
8	Soare	Nu
9	Soare	Da
11	Soare	Da

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Prin urmare, entropia sa va fi:

$$H_{S_S} = -\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} = 0{,}971.$$

Pentru valoarea *Înnorat* (*I*), nodul rezultat va avea toate cele 4 instanțe din clasa *Da*. Este evident că: $H_{S_I} = 0$.

Nr. instanţă	Starea vremii	Joc
3	Înnorat	Da
7	Înnorat	Da
12	Înnorat	Da
13	Înnorat	Da

Pentru valoarea *Ploaie* (*P*), nodul rezultat va avea 3 instanțe din clasa *Da* şi 2 din clasa *Nu*.

Nr. instanţă	Starea vremii	Joc
4	Ploaie	Da
5	Ploaie	Da
6	Ploaie	Nu
10	Ploaie	Da
14	Ploaie	Nu

Entropia sa va fi:

$$H_{S_P} = -\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} = 0{,}971.$$

Putem calcula acum entropia medie a partiționării după atributul *Starea vremii*:

$$H_S = \frac{5}{14}\cdot 0{,}971 + \frac{4}{14}\cdot 0 + \frac{5}{14}\cdot 0{,}971 = 0{,}694.$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Acelaşi tip de calcule se realizează pentru următorul atribut, *Temperatură* (*T*), cu valorile: *Mică* (*L*), *Medie* (*M*) şi *Mare* (*H*). Pentru a calcula mai uşor, sortăm tabelul după coloana *Temperatură* şi numărăm valorile clasei pentru fiecare valoare a atributului.

Nr. instanţă	Temperatură	Joc
5	Mică	Da
6	Mică	Nu
7	Mică	Da
9	Mică	Da
4	Medie	Da
8	Medie	Nu
10	Medie	Da
11	Medie	Da
12	Medie	Da
14	Medie	Nu
1	Mare	Nu
2	Mare	Nu
3	Mare	Da
13	Mare	Da

Se poate vedea uşor că:

$$H_{T_L} = -\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} = 0{,}811$$

$$H_{T_M} = -\frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6} = 0{,}918$$

$$H_{T_H} = -\frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} - \frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} = 1.$$

Prin urmare:

$$H_T = \frac{4}{14}\cdot 0{,}811 + \frac{6}{14}\cdot 0{,}918 + \frac{4}{14}\cdot 1 = 0{,}911.$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

La fel procedăm pentru atributul *Umiditate* (*U*), cu valorile: *Normală* (*N*) şi *Mare* (*M*).

Nr. instanţă	Umiditate	Joc
5	Normală	Da
6	Normală	Nu
7	Normală	Da
9	Normală	Da
10	Normală	Da
11	Normală	Da
13	Normală	Da
1	Mare	Nu
2	Mare	Nu
3	Mare	Da
4	Mare	Da
8	Mare	Nu
12	Mare	Da
14	Mare	Nu

Vom avea:

$$H_{U_N} = -\frac{6}{7}\log_2\frac{6}{7} - \frac{1}{7}\log_2\frac{1}{7} = 0{,}592$$

$$H_{T_M} = -\frac{3}{7}\log_2\frac{3}{7} - \frac{4}{7}\log_2\frac{4}{7} = 0{,}985$$

$$\Rightarrow H_U = \frac{7}{14}\cdot 0{,}592 + \frac{7}{14}\cdot 0{,}985 = 0{,}789.$$

În final, pentru atributul *Vânt* (*V*) cu valorile *Absent* (*A*) şi *Prezent* (*P*):

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

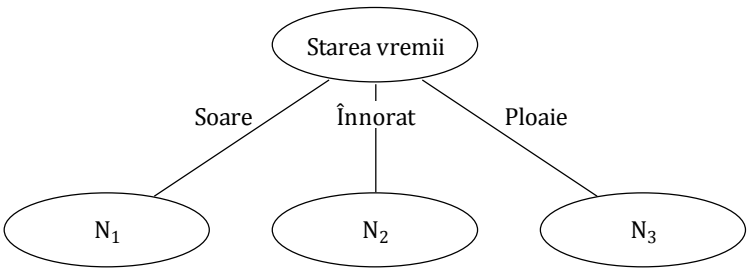
Nr. instanţă	Vânt	Joc
1	Absent	Nu
3	Absent	Da
4	Absent	Da
5	Absent	Da
8	Absent	Nu
9	Absent	Da
10	Absent	Da
13	Absent	Da
2	Prezent	Nu
6	Prezent	Nu
7	Prezent	Da
11	Prezent	Da
12	Prezent	Da
14	Prezent	Nu

$$H_{V_A} = -\frac{6}{8}\log_2\frac{6}{8} - \frac{2}{8}\log_2\frac{2}{8} = 0{,}811$$

$$H_{V_P} = -\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} - \frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} = 1$$

$$\Rightarrow H_V = \frac{8}{14}\cdot 0{,}811 + \frac{6}{14}\cdot 1 = 0{,}892.$$

Valoarea maximă a câştigului informaţional este corespunzătoare minimului entropiei ponderate $H_S = 0{,}694$ şi deci prima partiţionare se va face după atributul *Starea vremii*.



Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

După ce am făcut o partiționare, eliminăm atributul respectiv din mulțimea de date şi eliminărm şi instanțele care au valoarea atributului considerat diferită de valoarea de pe ramura nodului fiu corespunzător.

Pentru nodul N_1 se repetă procedura, eliminând atributul *Starea vremii* şi păstrând doar instanțele care au ca valoare a acestuia *Soarele* (5 instanțe).

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
1	Soare	Mare	Mare	Absent	Nu
2	Soare	Mare	Mare	Prezent	Nu
3	Înnorat	Mare	Mare	Absent	Da
4	Ploaie	Medie	Mare	Absent	Da
5	Ploaie	Mică	Normală	Absent	Da
6	Ploaie	Mică	Normală	Prezent	Nu
7	Înnorat	Mică	Normală	Prezent	Da
8	Soare	Medie	Mare	Absent	Nu
9	Soare	Mică	Normală	Absent	Da
10	Ploaie	Medie	Normală	Absent	Da
11	Soare	Medie	Normală	Prezent	Da
12	Înnorat	Medie	Mare	Prezent	Da
13	Înnorat	Mare	Normală	Absent	Da
14	Ploaie	Medie	Mare	Prezent	Nu

Pentru atributele rămase, calculăm din nou entropiile.

Pentru *Temperatură*:

$H_{T_L} = 0$ (1 instanță în clasa *Da*)

$H_{T_M} = 1$ (1 instanță în clasa *Da* şi 1 instanță în clasa *Nu*)

$H_{T_H} = 0$ (2 instanțe în clasa *Nu*)

$$\Rightarrow H_T = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 0 = 0{,}4.$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

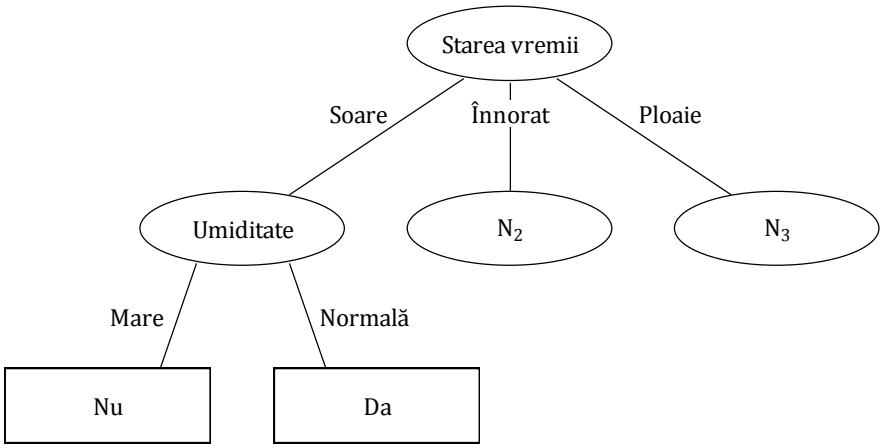
Pentru *Umiditate*:

$$H_{U_N} = 0$$
$$H_{U_M} = 0$$
$$\Rightarrow H_U = 0.$$

Pentru *Vânt*:

$$H_{V_A} = -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} = 0{,}918$$
$$H_{V_P} = 1$$
$$\Rightarrow H_V = \frac{3}{5}\cdot 0{,}918 + \frac{2}{5}\cdot 1 = 0{,}951.$$

$H_U = 0$ este valoarea minimă, prin urmare nodul N_1 va fi partiționat după *Umiditate*. Observăm că nodurile fiu rezultate sunt frunze omogene şi deci nu mai este nevoie de o altă partiționare.



În nodul N_2 avem următoarea mulțime de date:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
3	Înnorat	Mare	Mare	Absent	Da
7	Înnorat	Mică	Normală	Prezent	Da
12	Înnorat	Medie	Mare	Prezent	Da
13	Înnorat	Mare	Normală	Absent	Da

Nodul este omogen şi deci va fi la rândul său frunză, fără a mai trebui partiționat.

În sfârşit, în nodul N_3 avem următoarea mulțime de date:

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
4	Ploaie	Medie	Mare	Absent	Da
5	Ploaie	Mică	Normală	Absent	Da
6	Ploaie	Mică	Normală	Prezent	Nu
10	Ploaie	Medie	Normală	Absent	Da
14	Ploaie	Medie	Mare	Prezent	Nu

Aplicând aceeaşi procedură, vom obține: $H_T = 0{,}951$, $H_U = 0{,}951$ şi $H_V = 0$. Ultima valoare este minimă şi deci vom partiționa nodul N_3 după atributul *Vânt*, rezultând de asemenea două frunze.

Arborele final va fi cel din figura 7.4.

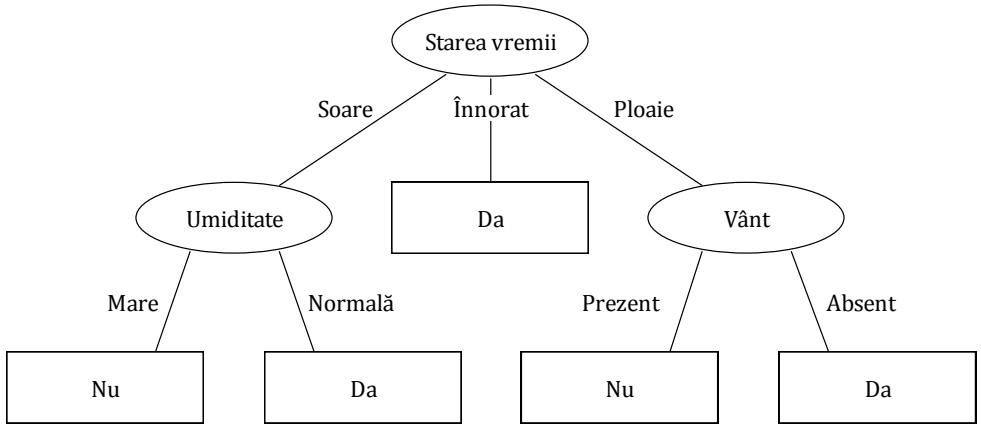


Figura 7.4. *Arborele de decizie pentru problema cu atribute simbolice*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Temperatura este un atribut irelevant pentru această clasificare.

Se observă că pe măsură ce mulțimile se partiționează, calculele devin din ce în ce mai simple. Din punct de vedere al implementării, cele mai dificile aspecte sunt crearea submulțimilor corespunzătoare nodurilor din arbore şi aplicarea recursivă a procedurii pentru acestea.

7.6. Probleme cu atribute numerice

Multe probleme de clasificare conțin date numerice, precum cea din tabelul 7.2, o variantă a celei studiate în secțiunea 7.5, unde *Temperatura* este dată în grade Celsius iar *Umiditatea* în procente.

Tabelul 7.2. *Problemă de clasificare cu atribute mixte*

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
1	Soare	29,4	85	Absent	Nu
2	Soare	26,7	90	Prezent	Nu
3	Înnorat	28,3	86	Absent	Da
4	Ploaie	21,1	96	Absent	Da
5	Ploaie	20,0	80	Absent	Da
6	Ploaie	18,3	70	Prezent	Nu
7	Înnorat	17,8	65	Prezent	Da
8	Soare	22,2	95	Absent	Nu
9	Soare	20,6	70	Absent	Da
10	Ploaie	23,9	80	Absent	Da
11	Soare	23,9	70	Prezent	Da
12	Înnorat	22,2	90	Prezent	Da
13	Înnorat	27,2	75	Absent	Da
14	Ploaie	21,7	91	Prezent	Nu

Pe lângă procedeele de discretizare, datele continue pot fi tratate ca atare. Metoda prrezentată în cele ce urmează este cea adoptată de algoritmul *C4.5*.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Procedura generală de partiționare este aceeaşi, pe baza câştigului informațional. Atributele simbolice sunt prelucrate la fel.

Pentru atributele numerice se doreşte o partiționare binară, adică se caută o valoare astfel încât instanțele cu valoarea mai mică decât referința să aparțină unui fiu iar cele cu valoarea mai mare decât referința să aparțină celuilalt fiu. Problema se reduce la determinarea valorii de referință. Pentru aceasta, într-o primă variantă, se sortează valorile atributului numeric şi se încearcă *toate* referințele potențiale dintre fiecare două valori alăturate.

Vom aplica această modalitate de calcul pentru atributul *Temperatură*.

Pozițiile de partiționare testate şi entropia corespunzătoare partiționării sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Pentru prima poziție de partiționare şi pentru ultima, se vede că toate instanțele intră într-un singur nod fiu, 9 dintre ele cu clasa *Da* şi 5 cu clasa *Nu*. Nicio instanță nu are temperatura mai mică decât 17,8 şi toate instanțele au temperatura mai mare sau egală cu 17,8. La fel, toate instanțele au temperatura mai mică sau egală cu 29,4 şi nicio instanță nu are temperatura mai mare decât 29,4. Este firesc, deoarece toate instanțele au temperatura mai mare sau egală cu prima valoare şi mai mică sau egală cu ultima valoare, în şirul sortat.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Temperatură	Joc	Poziţii de partiţionare	Număr Joc = Da	Număr Joc = Nu	Entropiile submulţimilor	Entropia partiţionării
		< 17,8 ≥ 17,8	0 9	0 5	0,000 0,940	0,940
17,8	Da					
		≤ 18,05 > 18,05	1 8	0 5	0,000 0,961	0,893
18,3	Nu					
		≤ 19,15 > 19,15	1 8	1 4	1,000 0,918	0,930
20,0	Da					
		≤ 20,3 > 20,3	2 7	1 4	0,918 0,946	0,940
20,6	Da					
		≤ 20,85 > 20,85	3 6	1 4	0,811 0,971	0,925
21,1	Da					
		≤ 21,4 > 21,4	4 5	1 4	0,722 0,991	0,895
21,7	Nu					
		≤ 21,95 > 21,95	4 5	2 3	0,918 0,954	0,939
22,2	Nu					
		≤ 22,2 > 22,2	5 4	3 2	0,985 0,863	0,924
22,2	Da					
		≤ 23,05 > 23,05	5 4	3 2	0,954 0,918	0,939
23,9	Da					
		≤ 23,9 > 23,9	6 3	3 2	0,918 0,971	0,937
23,9	Da					
		≤ 25,3 > 25,3	7 2	3 2	0,881 1,000	0,915
26,7	Nu					
		≤ 26,95 > 26,95	7 2	4 1	0,946 0,918	0,940
27,2	Da					
		≤ 27,75 > 27,75	8 1	4 1	0,918 1,000	0,930
28,3	Da					
		≤ 28,85 > 28,85	9 0	4 1	0,890 0,000	0,827
29,4	Nu	≤ 29,4 > 29,4	9 0	5 0	0,940 0,000	0,940

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Ca exemplu de calcul, să considerăm partiționarea după referința 28,85 = (28,3 + 29,4) / 2. 13 instanțe au temperatura mai mică sau egală cu 28,85, din care 9 aparțin clasei *Da* şi 4 clasei *Nu*. 1 instanță are temperatura mai mare decât 28,85, aparținând clasei *Nu*. Pentru primul nod fiu, entropia este:

$$H_{T\leq 28,85} = -\frac{9}{13}\log_2\frac{9}{13} - \frac{4}{13}\log_2\frac{4}{13} = 0,89.$$

Pentru al doilea nod fiu, entropia va fi 0, fiind omogen: $H_{T>28,85} = 0$.

Prin urmare, entropia medie a acestei partiționări va fi:

$$H_{T_{28,85}} = \frac{13}{14}\cdot 0,89 + \frac{1}{14}\cdot 0 = 0,827.$$

Se observă că această valoarea este minimă şi va corespunde atributului *Temperatură*.

Această abordare, de a considera toate valorile intermediare, nu este însă optimă. Pentru un număr mare de instanțe, efortul de calcul creşte foarte mult întrucât numărul de partiționări potențiale este foarte mare.

Putem observa însă în tabelul următor că după entropia inițială de 0,94, entropia scade până la valoarea 0,893, deoarece a fost introdusă într-un nod separat o instanță *Da*. Apoi entropia creşte la 0,93, pentru că în acel nod a intrat şi o instanță *Nu*, scăzându-i omogenitatea. În continuare, pe măsură ce alte 3 instanțe *Da* intră pe rând în nod, entropia tot scade, până la 0,895. În acest moment intră o instanță *Nu*, iar entropia creşte din nou. La fel, de jos în sus, entropia scade până la prima schimbare de clasă.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

		0,940
17,8	Da	↘
		0,893
18,3	Nu	↗
		0,930
20,0	Da	↗
		0,940
20,6	Da	↘
		0,925
21,1	Da	↘
		0,895
21,7	Nu	↗
		0,939
22,2	Nu	↘
		0,924
22,2	Da	↗
		0,939
23,9	Da	↘
		0,937
23,9	Da	↘
		0,915
26,7	Nu	↗
		0,940
27,2	Da	↘
		0,930
28,3	Da	↘
		0,827
		↗
29,4	Nu	0,940

Prin urmare, nu are rost să calculăm entropia decât în momentul în care se schimbă clasa între două instanțe alăturate în şirul sortat. Până când se schimbă clasa, entropia continuă să scadă deoarece intră într-un nod fiu mai multe instanțe din aceeaşi clasă.

Pentru atributul *Temperatură*, ar fi fost necesare doar 9 partiționări în loc de 15. În funcție de natura datelor, reducerea numărului poate fi mult mai drastică.

Vom utiliza această optimizare pentru calculul entropiei atributului *Umiditate*, după cum se poate observa în tabelul următor.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Umiditate	Joc	Poziţii de partiţionare	Număr Joc = Da	Număr Joc = Nu	Entropiile submulţimilor	Entropia partiţionării
		< 65 >= 65	0 9	0 5	0,000 0,940	0,940
65	Da					
		≤ 67,5 > 67,5	1 8	0 5	0,000 0,961	0,893
70	Da					
		≤ 70 > 70				-
70	Da					
		≤ 70 > 70	3 6	0 5	0,000 0,994	0,781
70	Nu					
		≤ 72,5 > 72,5	3 6	1 4	0,811 0,971	0,925
75	Da					
		≤ 77,5 > 77,5				-
80	Da					
		≤ 80 > 80				-
80	Da					
		≤ 82,5 > 82,5	6 3	1 4	0,592 0,985	0,788
85	Nu					
		≤ 85,5 > 85,5	6 3	2 3	0,811 1,000	0,892
86	Da					
		≤ 88 > 88				-
90	Da					
		≤ 90 > 90	8 1	2 3	0,722 0,811	0,747
90	Nu					
		≤ 90,5 > 90,5				-
91	Nu					
		≤ 93 > 93				-
95	Nu					
		≤ 95,5 > 95,5	8 1	5 0	0,961 0,000	0,893
96	Da	≤ 96 > 96	9 0	5 0	0,940 0,000	0,940

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Valoarea minimă este: $H_{U_{90}} = 0{,}747$. Pentru atributele simbolice *Starea vremii* şi *Vânt*, valorile sunt la fel ca acelea calculate în secțiunea 7.5: $H_S = 0{,}694$ şi $H_V = 0{,}892$.

Rezultatele pentru atribute simbolice şi numerice sunt tratate la fel, comparând entropiile medii ponderate obținute pentru toate atributele şi alegând minimul. Prima partiționare va fi tot după *Starea vremii*.

Nodul corespunzător valorii *Înnorat* este omogen, după cum se vede în tabelul de mai jos.

Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
Înnorat	28,3	86	Absent	Da
Înnorat	17,8	65	Prezent	Da
Înnorat	22,2	90	Prezent	Da
Înnorat	27,2	75	Absent	Da

Submulțimea de instanțe din nodul valorii *Ploaie* este cea din tabelul următor.

Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
Ploaie	21,1	96	Absent	Da
Ploaie	20,0	80	Absent	Da
Ploaie	23,9	80	Absent	Da
Ploaie	18,3	70	Prezent	Nu
Ploaie	21,7	91	Prezent	Nu

Pentru a evita calculele destul de laborioase, putem să analizăm tabelul şi să observăm că dacă sortăm valorile *Temperaturii* sau *Umidității*, valorile clasei *Da* şi *Nu* vor fi intercalate. Pentru atributul *Vânt*, este clar că printr-o singură partiționare vor rezulta două frunze omogene. Prin urmare, vom partiționa acest nod după atributul *Vânt*.

În cazul nodului corespunzător valorii *Soare*, submulțimea de instanțe de antrenare este prezentată în tabelul următor.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
Soare	20,6	70	Absent	Da
Soare	23,9	70	Prezent	Da
Soare	29,4	85	Absent	Nu
Soare	26,7	90	Prezent	Nu
Soare	22,2	95	Absent	Nu

Atributul *Vânt* va avea o entropie medie de 0,951, ca şi în cazul simbolic.

Aplicăm procedura partiționărilor multiple după valori intermediare pentru atributul *Temperatură*, după cum se observă în tabelul de mai jos.

Temperatură	Joc	Poziţii de partiţionare	Număr Joc = Da	Număr Joc = Nu	Entropiile submulţimilor	Entropia partiţionării
		< 20,6 >= 20,6	0 2	0 3	0,000 0,971	0,971
20.6	Da					
		≤ 21,4 > 21,4	1 1	0 3	0,000 0,811	0,649
22.2	Nu					
		≤ 23,05 > 23,05	1 1	1 2	1,000 0,918	0,951
23.9	Da					
		≤ 25,3 > 25,3	2 0	1 2	0,918 0,000	0,551
26.7	Nu					
		≤ 28,05 > 28,05	2 0	2 1	1,000 0,000	0,800
29.4	Nu	≤ 29,4 > 29,4	2 0	3 0	0,971 0,000	0,971

Valoarea minimă este 0,551 pentru referința 25,3.

Pentru *Umiditate*, jumătate din partiționări sunt evitate considerând doar referințele unde se schimbă clasa şi rezultă o valoare minimă 0 pentru referința 77,5. Este clar că vom partiționa după *Umiditate*, rezultând şi aici două frunze omogene.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Umiditate	Joc	Poziţii de partiţionare	Număr Joc = Da	Număr Joc = Nu	Entropiile submulţimilor	Entropia partiţionării
		< 70 >= 70	0 2	0 3	0,000 0,971	0,971
70	Da					
		≤ 70 > 70				-
70	Da					
		≤ 77,5 > 77,5	2 0	0 3	0,000 0,000	0,000
85	Nu					
		≤ 87,5 > 87,5				-
90	Nu					
		≤ 92,5 > 92,5				-
95	Nu	≤ 95 > 95	2 0	3 0	0,971 0,000	0,971

Arborele final rezultat este cel prezentat în figura 7.5.

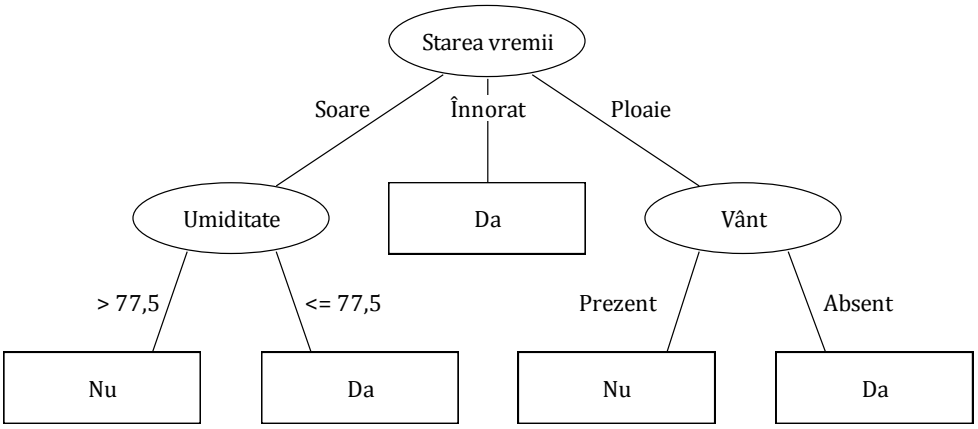


Figura 7.5. *Arborele de decizie pentru problema cu atribute mixte*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

7.7. Aplicarea modelului

Cunoscându-se arborele de decizie construit, clasificarea unei noi instanțe este foarte simplă. Parcurcând arborele cu valorile atributelor instanței, se clasifică aceasta într-una din clase.

Se testează mai întâi atributul corespunzător rădăcinii arborelui. Conform valorii atributului respectiv al instanței de interogare, se merge pe ramura aferentă, se testează apoi atributul corespunzător nodului în care s-a ajuns şi aşa mai departe până se ajunge într-un nod frunză care are clasa specificată.

Să considerăm instanța de interogare x_q = (*Soare*, 26, 72, *Absent*). Clasificarea acesteia se realizează urmărind arborele din figura 7.5. Rădăcina arborelui presupune un test al atributului *Starea vremii*. Pentru x_q, valoarea acestuia este *Soare*, prin urmare continuăm parcurgerea arborelui pe ramura corespunzătoare acestei valori. Urmează testul după atributul *Umiditate*. Valoarea acestuia pentru x_q este 72, care este mai mică sau egală cu 77,5. Urmând ramura corespunzătoare, ajungem în frunza etichetată *Da*. În consecință, instanța x_q este clasificată în clasa *Da*.

7.8. Erorile modelului

Aplicând metodele prezentate în acest capitol, pot exista mai multe atribute cu acceaşi valoare minimă a entropiei medii iar partiționarea se poate face după oricare din ele, însă arborii de decizie finali rezultați pot fi complet diferiți în funcție de această decizie.

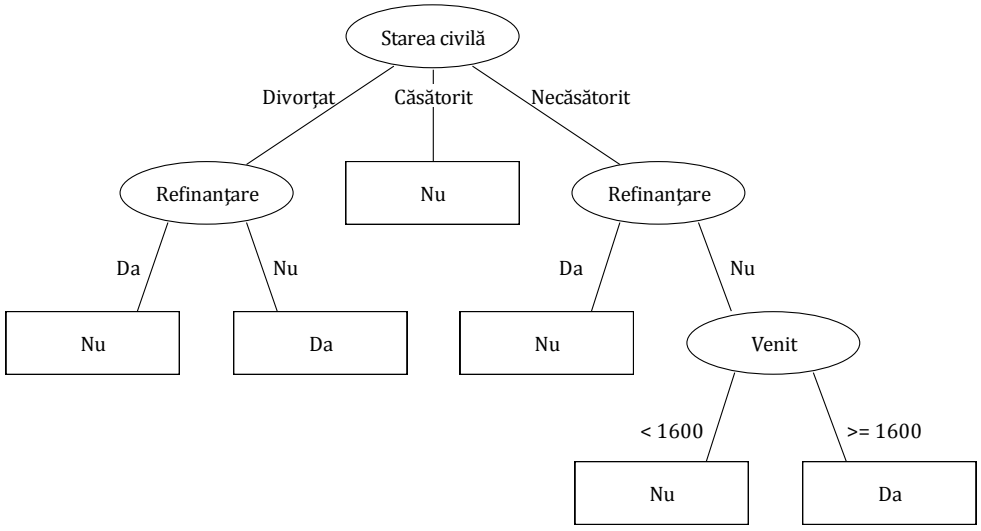
De asemenea, pot exista mulțimi de date pentru care un model să fie greu de realizat şi în consecință să existe erori chiar şi la antrenare. De

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

exemplu, să considerăm o problemă de clasificare (adaptată după Tan, Steinbach & Kumar, 2006) unde dorim să prezicem dacă o persoană va returna un credit de la o bancă, pe baza următoarelor atribute: *Refinanţare* (dacă şi-a refinanţat creditul), *Stare civilă* şi *Venit* (să spunem lunar, în lei).

Refinanţare	Stare civilă	Venit	Nerambursare
Da	Necăsătorit	2500	Nu
Nu	Căsătorit	2000	Nu
Nu	Necăsătorit	1400	Nu
Da	Căsătorit	2400	Nu
Nu	Divorţat	1900	Da
Nu	Căsătorit	1200	Nu
Da	Divorţat	4400	Nu
Nu	Necăsătorit	1700	Da
Nu	Căsătorit	1500	Nu
Nu	Necăsătorit	1800	Da

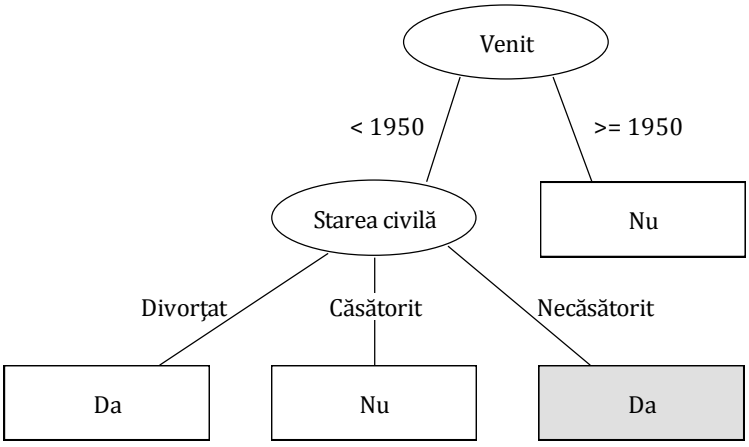
Când începem să aplicăm procedura de construire a arborelui de decizie, constatăm că partiționările după *Starea civilă* şi după *Venit* sunt la fel de bune, având acelaşi câştig informațional. În funcție de această decizie inițială, rezultatele pot fi foarte diferite.



Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Dacă se alege partiționarea după *Starea civilă*, arborele rezultat va fi cel din figura anterioară.

Dacă se alege partiționarea alternativă după *Venit*, arborele rezultat va fi următorul.



În frunza *Da* marcată cu gri, mulțimea de date este cea din tabelul de mai jos.

Refinanţare	Stare civilă	Venit	Nerambursare
Da	Necăsătorit	2500	Nu
Nu	Căsătorit	2000	Nu
Nu	Necăsătorit	1400	Nu
Da	Căsătorit	2400	Nu
Nu	Divorţat	1900	Da
Nu	Căsătorit	1200	Nu
Da	Divorţat	4400	Nu
Nu	Necăsătorit	1700	Da
Nu	Căsătorit	1500	Nu
Nu	Necăsătorit	1800	Da

Prin excluderea atributelor deja tratate, nu mai există alte opțiuni pentru teste care să diferențieze clasele instanțelor rămase şi se ajunge într-o

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

frunză pe care o marcăm cu clasa majoritară a instanţelor sale. Arborele de decizie are o eroare chiar pe mulţimea de antrenare, ceea ce înseamnă că nu a putut fi creat un model suficient de bun pentru datele disponibile.

În general, erorile corespunzătoare mulţimii de test sunt mai numeroase decât cele corespunzătoare mulţimii de antrenare.

7.9. Câştigul proporţional

O altă problemă care afectează performanţele acestui tip de algoritmi este faptul că măsura câştigului informaţional favorizează atributele cu un număr mare de valori. De exemplu, dacă am fi utilizat în clasificare coloana *Nr. instanţă*, cu 14 valori diferite, entropia medie ar fi fost 0, întrucât ar fi rezultat o partiţionare cu 14 fii omogeni. Capacitatea de generalizare este în mod clar afectată de suprapotrivire.

În acest scop, s-a propus măsura *câştigului proporţional* (engl. "gain ratio", Quinlan, 1986).

Folosind semnificaţia notaţiilor din ecuaţiile 7.3 şi 7.4, se introduce noţiunea de *informaţie intrinsecă*:

$$I = -\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} \cdot \log_2 \frac{n_i}{n} \tag{7.6}$$

Câştigul proporţional este definit drept raportul dintre câştigul informaţional şi informaţia intrinsecă:

$$CP = \frac{\Delta}{I} \tag{7.7}$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

La alegerea unui atribut pentru partiționare, câştigul proporțional trebuie maximizat.

7.10. Alţi algoritmi de inducţie a arborilor de decizie

Procedura prezentată de construire a arborilor de decizie este euristică şi deci nu garantează obținerea arborelui optim. Găsirea celui mai bun arbore posibil este o problemă de optimizare NP dificilă, care presupune încercarea tuturor combinațiilor posibile de atribute. În general, utilizând criterii şi metode diferite de partiționare, pot rezulta mai mulți arbori pentru aceeaşi mulțime de antrenare.

Algoritmul *C4.5* (Quinlan, 1993) este o extensie a algoritmului *ID3* care, pe lângă tratarea atributelor continue, permite şi partiționarea de mai multe ori după acelaşi atribut. De asemenea, poate „reteza" sau simplifica arborele generat (engl. "pruning") pentru a creşte capacitatea de generalizare. Dacă arborele este prea mare (are prea multe frunze), este ca şi cum am crea câte o regulă pentru fiecare instanță, ceea ce evident poate conduce la suprapotrivire. După construirea unui arbore, anumite ramuri cu prea puține instanțe şi care nu au un aport foarte important la clasificare pot fi retezate, astfel încât să crească şansele de a generaliza mai bine. Dacă datele sunt afectate de zgomot, retezarea poate elimina instanțele eronate.

Există şi o modalitate aleatorie de generare a arborilor (*Random Tree*). În acest caz nu se mai foloseşte un criteriu de omogenitate, ci se alege aleatoriu un atribut după care se face partiționarea. Arborii sunt de dimensiuni mai mari, pe mulțimea de antrenare dau erori în general nule, dar nu se garantează o capacitate de generalizare la fel de bună. În practică însă, funcționează destul de bine.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Mai există şi o tehnică ce grupează mai mulți arbori aleatorii (*Random Forest*), în care arborii sunt construiți separat şi pentru clasificarea unei noi instanțe fiecare dă un vot privind clasa. Rezultatul este clasa care obține cele mai multe voturi.

7.11. Concluzii

Printre avantajele clasificării cu arbori de decizie, menționăm:

- Sunt relativ uşor de construit, deşi necesită totuşi o serie de calcule;
- Sunt rapizi la clasificarea instanțelor noi;
- Sunt uşor de interpretat, mai ales pentru arbori de dimensiuni mici;
- Un arbore de decizie poate fi interpretat ca o mulțime de reguli, de exemplu: „Dacă vremea este însorită şi umiditatea este mai mică sau egală cu 77,5, atunci se poate juca golf”.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 8

Clasificatorul bayesian naiv

8.1. Modelul teoretic

Metoda de clasificare bayesiană naivă (engl. "Naïve Bayes") se bazează pe calcularea probabilităților ca o anumită instanță să aparțină claselor problemei.

Într-o rețea bayesiană, se evita calcularea întregii distribuții comune de probabilitate după regula de înmulțire a probabilităților (engl. "chain rule") presupunând că un nod depinde doar de părinții săi din graf. În metoda naivă, presupunerea simplificatoare este şi mai puternică, considerând că toate atributele sunt independente dată fiind clasa. Acest fapt nu este neapărat adevărat, de cele mai multe ori, dimpotrivă, condiția de independență poate să nu fie satisfăcută. Cu toate acestea, s-a constatat că deseori metoda are rezultate foarte bune.

Formal, se consideră fiecare atribut şi clasa ca variabile aleatorii. Se dă o instanță definită de valorile atributelor $(A_1, \dots, A_n)$. Scopul este determinarea clasei C pentru această combinație de valori, ceea ce este echivalent cu găsirea valorii C_j care maximizează probabilitatea clasei dată fiind instanța:

$$C^* = \underset{C_j}{\operatorname{argmax}}\, P\big(C_j | A_1, \dots, A_n\big). \tag{8.1}$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Această probabilitate trebuie estimată direct din datele mulțimii de antrenare, pe baza frecvențelor relative de apariție a valorilor atributelor.

Conform teoremei lui Bayes:

$$P(C_j|A_1, \dots, A_n) = \frac{P(A_1, \dots, A_n|C_j) \cdot P(C_j)}{P(A_1, \dots, A_n)}. \tag{8.2}$$

$P(A_1, \dots, A_n)$ este aceeaşi pentru toate valorile clasei întrucât este vorba despre aceeaşi instanță pentru toate clasele. Ea depinde doar de valorile atributelor instanței şi nu de clase, astfel încât o putem ignora atunci când vrem să maximizăm cantitatea din partea dreaptă a ecuației (8.2). Problema de clasificare devine echivalentă cu alegerea valorii clasei care maximizează numărătorul:

$$C^* = \underset{C_j}{\operatorname{argmax}}\, P(A_1, \dots, A_n|C_j) \cdot P(C_j). \tag{8.3}$$

Rămâne de estimat probabilitatea instanței dată fiind clasa. Considerând că toate atributele sunt independente dată fiind clasa (presupunerea fundamentală a metodei bayesiene naive), putem exprima acest produs sub forma:

$$P(A_1, \dots, A_n|C_j) = P(A_1|C_j) \cdot \dots \cdot P(A_n|C_j). \tag{8.4}$$

După cum vom vedea în continuare, putem estima uşor din datele mulțimii de antrenare $P(A_i|C_j)$ pentru toate valorile atributelor A_i şi clasei C_j. Problema de clasificare devine următoarea:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$C^* = \underset{C_j}{\operatorname{argmax}}\, P(C_j) \cdot \prod_{i=1}^{n} P(A_i|C_j). \tag{8.5}$$

Metoda se reduce la găsirea clasei pentru care valoarea produsului este maximă.

8.2. Probleme cu atribute simbolice

Pentru a exemplifica modalitatea de calcul, vom considera aceeaşi problemă ca în capitolul 7, privind oportunitatea de a juca golf sau nu (tabelul 8.1).

Tabelul 8.1. *Problemă de clasificare cu atribute simbolice*

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
1	Soare	Mare	Mare	Absent	Nu
2	Soare	Mare	Mare	Prezent	Nu
3	Înnorat	Mare	Mare	Absent	Da
4	Ploaie	Medie	Mare	Absent	Da
5	Ploaie	Mică	Normală	Absent	Da
6	Ploaie	Mică	Normală	Prezent	Nu
7	Înnorat	Mică	Normală	Prezent	Da
8	Soare	Medie	Mare	Absent	Nu
9	Soare	Mică	Normală	Absent	Da
10	Ploaie	Medie	Normală	Absent	Da
11	Soare	Medie	Normală	Prezent	Da
12	Înnorat	Medie	Mare	Prezent	Da
13	Înnorat	Mare	Normală	Absent	Da
14	Ploaie	Medie	Mare	Prezent	Nu

Metoda bayesiană naivă clasifică o instanță dată, care poate să fie una nouă, care nu aparține mulțimii de antrenare.

În cazul de față, fie această instanță: x_q = (*Soare*, *Mare*, *Normală*, *Absent*).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Trebuie să realizăm un număr de calcule egal cu numărul de clase. Apoi vom alege clasa pentru care probabilitatea de apartenență a instanței este maximă.

Mai întâi vom calcula produsul pentru clasa *Joc = Da* (J_D). Din tabelul sortat după valoarea clasei, se observă că această valoare apare de 9 ori.

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
3	Înnorat	Mare	Mare	Absent	Da
4	Ploaie	Medie	Mare	Absent	Da
5	Ploaie	Mică	Normală	Absent	Da
7	Înnorat	Mică	Normală	Prezent	Da
9	Soare	Mică	Normală	Absent	Da
10	Ploaie	Medie	Normală	Absent	Da
11	Soare	Medie	Normală	Prezent	Da
12	Înnorat	Medie	Mare	Prezent	Da
13	Înnorat	Mare	Normală	Absent	Da
1	Soare	Mare	Mare	Absent	Nu
2	Soare	Mare	Mare	Prezent	Nu
6	Ploaie	Mică	Normală	Prezent	Nu
8	Soare	Medie	Mare	Absent	Nu
14	Ploaie	Medie	Mare	Prezent	Nu

Prin urmare:

$$P(J_D) = \frac{9}{14}.$$

Pentru calculul probabilităților condiționate din produs, numărăm instanțele care au valoarea dorită a atributului, numai în clasa considerată. De exemplu, pentru atributul *Starea vremii*, ne interesează câte instanțe au valoarea *Soare* (dată de instanța de interogare x_q).

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Nr. instanţă	Starea vremii	Joc
9	Soare	Da
11	Soare	Da
3	Înnorat	Da
7	Înnorat	Da
12	Înnorat	Da
13	Înnorat	Da
4	Ploaie	Da
5	Ploaie	Da
10	Ploaie	Da

Din tabelul de mai sus, se poate vedea că numai 2 instanțe din cele 9 din clasa *Da* au valoarea *Soare*. Deci:

$$P(S_S|J_D) = \frac{2}{9}.$$

Analog se procedează şi pentru restul atributelor, obținând:

$$P(T_H|J_D) = \frac{2}{9}$$
$$P(U_N|J_D) = \frac{6}{9}$$
$$P(V_A|J_D) = \frac{6}{9}.$$

Aceleaşi calcule se realizează pentru clasa *Nu* (*N*):

$$P(J_N) = \frac{5}{14}$$
$$P(S_S|J_N) = \frac{3}{5}$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(T_H|J_N) = \frac{2}{5}$$

$$P(U_N|J_N) = \frac{1}{5}$$

$$P(V_A|J_N) = \frac{2}{5}.$$

Putem calcula acum produsele pentru fiecare clasă:

$$P(J_D) \cdot P(x_q|J_D) = \frac{9}{14} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = 14{,}109 \cdot 10^{-3},$$

$$P(J_N) \cdot P(x_q|J_N) = \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = 6{,}857 \cdot 10^{-3}.$$

Valoarea maximă este prima şi deci instanța va fi clasificată în clasa *Da*.

8.3. Considerente practice

8.3.1. Corecţia Laplace

Deoarece clasificarea se bazează pe calcularea unor produse, dacă un factor este 0, întregul produs devine 0. Să considerăm următoarea mulțime de antrenare:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Starea vremii	Umiditate	Joc
Înnorat	Mare	Da
Ploaie	Mare	Da
Înnorat	Mare	Da
Soare	Mare	Nu
Soare	Mare	Nu
Ploaie	Normală	Nu

şi instanța pe care dorim să o clasificăm: x_q = (*Înnorat*, *Normală*).

Mai întâi realizăm calculele pentru clasa *Da*:

$$P(J_D) = \frac{3}{6}$$
$$P(S_I|J_D) = \frac{2}{3}$$
$$P(U_N|J_D) = \frac{0}{3}.$$

Apoi realizăm calculele pentru clasa *Nu*:

$$P(J_N) = \frac{3}{6}$$
$$P(S_I|J_N) = \frac{0}{3}$$
$$P(U_N|J_N) = \frac{1}{3}.$$

Calculând produsele de probabilități, se vede că ambele sunt 0 şi deci nu putem lua nicio decizie de clasificare a instanței x_q:

$$P(J_D) \cdot P(x_q|J_D) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{0}{3} = 0,$$
$$P(J_N) \cdot P(x_q|J_N) = \frac{3}{6} \cdot \frac{0}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

În general, pentru mai multe clase, dacă în fiecare produs există câte un factor nul, atunci toate produsele, pentru toate clasele, se anulează. Totuşi, ceilalţi factori nenuli ai produsului ne-ar putea da informaţii relevante pentru clasificare. În acest sens, există metode care garantează că niciun produs nu va fi 0. În locul calculului tipic al frecvenţelor relative ca raport între numărul de apariţii a unei valori a atributului *i* în clasa *j* (n_{ij}) şi numărul de apariţii a valorii clasei *j* (n_j):

$$P(A_i|C_j) = \frac{n_{ij}}{n_j}, \tag{8.6}$$

se poate folosi *estimarea-m* (engl. "m-estimate") care „netezeşte" probabilităţile aplicând următoarea formulă de calcul:

$$P(A_i|C_j) = \frac{n_{ij} + mp}{n_j + m}. \tag{8.7}$$

Corecţia Laplace poate fi considerată un caz particular al estimării-m unde, dacă c este numărul de clase, putem considera $m = c$ şi $p = 1/c$, rezultând:

$$P(A_i|C_j) = \frac{n_{ij} + 1}{n_j + c}. \tag{8.8}$$

Practic, se adaugă la numărător 1 şi la numitor numărul de clase. În acest mod, toţi factorii vor avea valori $v \in (0, 1)$. Probabilităţile sunt estimate ca frecvenţe relative din date, dar nu cunoaştem valorile absolute. Teoretic, ar putea să mai existe instanţe pe care încă nu le-am întâlnit şi atunci considerăm a-priori că mai există câte o instanţă din fiecare clasă.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Din punct de vedere filosofic, faptul că probabilitățile nu pot fi 0 sau 1 ne conduce la ideea că nu putem fi siguri niciodată de ceva că e adevărat sau fals în mod absolut.

Pentru exemplul simplificat, vom avea acum:

$$P(J_D) \cdot P(x_q|J_D) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2+1}{3+2} \cdot \frac{0+1}{3+2} = 0{,}06$$

$$P(J_N) \cdot P(x_q|J_N) = \frac{3}{6} \cdot \frac{0+1}{3+2} \cdot \frac{1+1}{3+2} = 0{,}04$$

şi deci se poate lua o decizie (*Da*), iar rezultatul este conform cu analiza mulțimii de antrenare, unde valoarea *Înnorat* apare în clasa *Da* de două ori iar valoarea *Normală* apare în clasa *Nu* o singură dată.

Pentru exemplul inițial din secțiunea 8.2, aplicând corecția Laplace vom avea:

$$P(J_D) \cdot P(x_q|J_D) = \frac{9}{14} \cdot \frac{2+1}{9+2} \cdot \frac{2+1}{9+2} \cdot \frac{6+1}{9+2} \cdot \frac{6+1}{9+2} = 19{,}363 \cdot 10^{-3}$$

$$P(J_N) \cdot P(x_q|J_N) = \frac{5}{14} \cdot \frac{3+1}{5+2} \cdot \frac{2+1}{5+2} \cdot \frac{1+1}{5+2} \cdot \frac{2+1}{5+2} = 10{,}71 \cdot 10^{-3}.$$

Rezultatul clasificării nu se schimbă deoarece contează doar comparația, nu cantitățile propriu-zise. Pentru metoda bayesiană naivă, partea calitativă este mai importantă decât partea cantitativă.

Corecția Laplace este foarte utilă mai ales la clasificarea textelor, unde atributele sunt cuvintele însele şi, având multe documente, este probabil ca din acestea să lipsească anumiți termeni.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

8.3.2. Precizia calculelor

O altă problemă care poate să apară este faptul că un produs de probabilități subunitare cu mulți factori poate fi afectat de precizia reprezentării numerelor. Astfel, dacă valoarea produsului devine mai mică decât cantitatea minimă care poate fi reprezentată în virgulă mobilă, rezultatul va deveni 0.

O soluție este *logaritmarea* şi în acest caz, produsul de probabilități este înlocuit cu suma logaritmilor de probabilități.

De exemplu, pentru calculul $P(J_D) \cdot P\left(x_q|J_D\right)$ de mai sus, vom avea:

$$\ln\left(P(J_D) \cdot P\left(x_q|J_D\right)\right) = \ln\frac{9}{14} + \ln\frac{2+1}{9+2} + \ln\frac{2+1}{9+2} + \ln\frac{6+1}{9+2} + \ln\frac{6+1}{9+2}$$
$$= -0{,}442 - 1{,}299 - 1{,}299 - 0{,}452 - 0{,}452 = -3{,}924$$
$$\Rightarrow P(J_D) \cdot P(x_d|J_D) = \mathrm{e}^{-3{,}924} \cong 19{,}363 \cdot 10^{-3}.$$

Pentru simplitate, mai sus am inclus doar 3 zecimale. Desigur, pentru o precizie suficientă a rezultatului, reprezentarea termenilor sumei trebuie să fie corespunzătoare.

8.4. Probleme cu atribute numerice

Pentru atribute numerice, există mai multe modalități de abordare. După cum am explicat în secțiunea 7.2, valorile acestora pot fi discretizate, rezultând atribute ordinale. De asemenea, se poate aplica partiționarea binară: se alege o valoare de referință iar valorile atributului rezultat vor fi

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Da sau *Nu*, dacă valorile atributului inițial sunt mai mari sau mai mici, respectiv, decât referința.

O abordare specifică metodei bayesiene naive este mai complexă şi mai puțin folosită în practică, însă interesantă din punct de vedere conceptual. Ideea de bază este asemănătoare cu aceea de la corecția Laplace sau estimarea-m: estimarea distribuției de probabilitate. Putem presupune de exemplu că valorile atributului numeric respectă o distribuție normală (gaussiană). Nu este obligatoriu să respecte această distribuție; dacă ştim că datele urmează alte distribuții, putem estima parametrii acestora. Pentru distribuția normală, parametrii pe care trebuie să îi determinăm sunt media μ şi deviația standard σ:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{8.9}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2} \tag{8.10}$$

Probabilitățile utilizate apoi în clasificarea bayesiană naivă sunt calculate din distribuția normală:

$$P(A_i|C_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{ij}} \mathrm{e}^{-\frac{(A_i-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}} \tag{8.11}$$

Pentru a exemplifica, vom considera mulțimea de date cu atribute numerice analizată şi în capitolul precedent (tabelul 8.2):

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Tabelul 8.2. *Problemă de clasificare cu atribute mixte*

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
1	Soare	29,4	85	Absent	Nu
2	Soare	26,7	90	Prezent	Nu
3	Înnorat	28,3	86	Absent	Da
4	Ploaie	21,1	96	Absent	Da
5	Ploaie	20,0	80	Absent	Da
6	Ploaie	18,3	70	Prezent	Nu
7	Înnorat	17,8	65	Prezent	Da
8	Soare	22,2	95	Absent	Nu
9	Soare	20,6	70	Absent	Da
10	Ploaie	23,9	80	Absent	Da
11	Soare	23,9	70	Prezent	Da
12	Înnorat	22,2	90	Prezent	Da
13	Înnorat	27,2	75	Absent	Da
14	Ploaie	21,7	91	Prezent	Nu

şi ne propunem clasificarea instanței: x_q = (*Soare*, 26, 72, *Absent*).

Pentru atributele simbolice, calculele sunt aceleaşi ca în secțiunea 8.2. Pentru atributul *Temperatură*, pentru clasa *Da*, media valorilor este 22,778 iar deviația standard este 3,214. Prin urmare:

$$P(T_{26}|J_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3{,}214}\mathrm{e}^{-\frac{(26-22{,}778)^2}{2\cdot 3{,}214^2}} = 0{,}0751.$$

Pentru clasa *Nu*, media valorilor este 23,66 iar deviația standard este 3,922 şi vom avea:

$$P(T_{26}|J_N) = 0{,}0851.$$

Pentru atributul *Umiditate*, probabilitățile vor fi:

$$P(U_{72}|J_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 9{,}631}\mathrm{e}^{-\frac{(72-79{,}111)^2}{2\cdot 9{,}631^2}} = 0{,}0315,$$

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$P(U_{72}|J_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 8{,}704} e^{-\frac{(72-86{,}2)^2}{2\cdot 8{,}704^2}} = 0{,}0121.$$

În final:

$$P(J_D)\cdot P(x_q|J_D) = \frac{9}{14}\cdot\frac{2+1}{9+2}\cdot 0{,}0751\cdot 0{,}0315\cdot\frac{6+1}{9+2} = 0{,}264\cdot 10^{-3}$$

$$P(J_N)\cdot P(x_q|J_N) = \frac{5}{14}\cdot\frac{3+1}{5+2}\cdot 0{,}0851\cdot 0{,}0121\cdot\frac{2+1}{5+2} = 0{,}09\cdot 10^{-3}$$

şi rezultatul este din nou clasa *Da*.

8.5. Concluzii

Dintre avantajele metodei de clasificare bayesiene naive menționăm calculele simple şi robustețea la zgomot şi atribute irelevante. De aceea, este foarte potrivită pentru mulțimi de antrenare de dimensiuni medii sau mari (de exemplu pentru clasificarea documentelor text, detecția spam-ului, diagnoză etc.).

Chiar dacă se bazează pe independența atributelor dată fiind clasa, metoda funcționează de multe ori bine chiar şi atunci când presupunerea este infirmată în realitate.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Capitolul 9

Clasificarea bazată pe instanţe

9.1. Introducere

O altă metodă de clasificare este cea *bazată pe instanţe*, care presupune memorarea efectivă a tuturor instanţelor de antrenare. Mai ales în cazul arborilor de decizie, pentru a clasifica noi instanţe încercăm să realizăm un model al datelor de antrenare. Dacă avem o mulţime de 10000 de instanţe, este teoretic posibil să construim un arbore de decizie de dimensiuni (mult) mai mici, care să le modeleze. Aici, memorăm pur şi simplu toate informaţiile iar clasificarea presupune estimarea similarităţii unei noi instanţe faţă de cele existente, la fel cum clasifică oamenii noi obiecte sau situaţii prin analogie cu cele cunoscute deja.

Instanţele, definite de valorile atributelor lor, pot fi văzute ca nişte puncte într-un spaţiu *n*-dimensional, unde *n* este numărul de atribute.

De exemplu, să considerăm o problemă de estimare a riscului cardiovascular al unor pacienţi, ţinând seama de vârstă (în ani) şi de indicele masei corporale: $IMC = G/I^2$, unde G este greutatea (în kilograme) iar I este înălţimea (în metri).

După cum se poate vedea în figura 9.1, dacă avem două atribute numerice, fiecare instanţă reprezintă un punct în plan. Instanţele încercuite semnifică pacienţi cu risc crescut, iar cele neîncercuite pacienţi cu risc scăzut.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

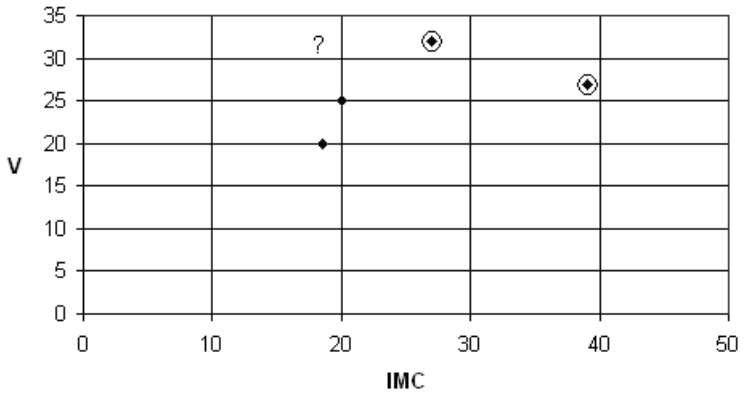


Figura 9.1. *Reprezentare grafică a unei probleme de clasificare*

În acest plan, calculăm cât de aproape este o nouă instanță, marcată cu „?”, față de cele de antrenare.

În cazul algoritmului *cel mai apropiat vecin* (engl. “nearest neighbor”, *NN*) identificăm instanța din mulțimea de antrenare cea mai apropiată de instanța de interogare şi rezultatul clasificării este clasa instanței respective din mulțimea de antrenare.

În cazul algoritmului *cei mai apropiați k vecini* (engl. “k-nearest neighbor”, *kNN*) identificăm cele mai apropiate *k* instanțe şi clasificăm noua instanță pe baza votului majoritar al acestor vecini. Dintre cele *k* instanțe de antrenare selectate, se numără câte aparțin fiecărei clase a problemei iar rezultatul este clasa în care se găsesc cele mai multe.

9.2. Metrici de distanţă

Pentru a vedea „cât de apropiate” sunt instanțele, avem nevoie de o metrică de distanță. De obicei se folosesc particularizări ale distanței Minkowski:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{9.1}$$

unde **x** şi **y** sunt vectori *n*-dimensionali iar p este un parametru.

Când $p = 2$ formula indică distanța euclidiană. Când $p = 1$ formula indică distanța Manhattan. Aceste două metrici de distanță sunt cele mai utilizate în practică.

De exemplu, să considerăm două puncte bidimensionale A şi B, definite de coordonatele $\{1,\ 2\}$, respectiv $\{4,\ 6\}$. Prin urmare, $\Delta x = 3$ şi $\Delta y = 4$. Figura 9.2 indică distanța euclidiană şi distanța Manhattan dintre cele două puncte.

Figura 9.2. *Distanţa euclidiană şi distanţa Manhattan*

În tabelul 9.1 se calculează valoarea distanței dintre puncte pentru diferite valori ale parametrului p.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Tabelul 9.1. *Valorile distanţei când parametrul p variază*

p	d
$p = 1$	$d = 3 + 4 = 7$
$p = 2$	$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$p = 3$	$d = \sqrt[3]{3^3 + 4^3} = 4{,}498$
$p = 10$	$d = \sqrt[10]{3^{10} + 4^{10}} = 4{,}022$
$p \to \infty$	$d = \max(3, 4) = 4$

9.3. Scalarea atributelor

În mulțimea de date putem avea atribute de orice fel, cu orice fel de valori. Putem avea de exemplu:

- Înălțimea unei persoane ∈ [1,5, 2,1] m;
- Greutatea unei persoane ∈ [50, 120] kg;
- Venitul unei persoane ∈ [9600, 60000] lei/an.

Toate aceste atribute intervin în clasificare şi pentru calculul distanței; dacă vom considera primul şi al treilea atribut, este evident că va conta în mult mai mare măsură ultimul. De exemplu, să comparăm două persoane cu venituri 30000 şi 31000 şi înățime 1,5 şi 2,1. Pentru venituri, aceasta este o diferență mică, în timp ce înălțimile sunt la marginile intervalului. În schimb, valoarea absolută a diferenței de venit este atât de mare, încât domină clasificarea.

De aceea, se foloseşte în general normalizarea atributelor, ca un pas de preprocesare a datelor, astfel încât toate atributele să aibă valori între 0 şi 1, aplicând formula de transformare:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$x_i' = \frac{(x_i - min_i)}{(max_i - min_i)} \in [0,1] \tag{9.2}$$

9.4. Calculul distanţelor pentru diferitele tipuri de atribute

Deoarece algoritmii *NN* şi *kNN* se bazează pe calculul unor distanţe, trebuie să definim diferenţele dintre valorile atributelor din punct de vedere numeric. Vom descrie nişte metode în acest scop pentru fiecare tip de atribut.

Pentru atributele nominale, distanţa dintre valorile unui atribut se consideră 0 dacă valorile sunt egale şi 1 dacă sunt diferite. Între valorile atributului nu există alte relaţii şi prin urmare nu există distanţe intermediare între 0 şi 1.

Pentru atribute ordinale, se pot considera valorile egal distribuite între 0 şi 1. De exemplu, pentru trei valori { *Mic*, *Mediu*, *Mare* }, se poate considera transformarea: *Mic* = 0, *Mediu* = 0,5 şi *Mare* = 1. Calculul distanţelor va fi valoarea absolută a acestor valori numerice, precum: *d*(*Mic*, *Mare*) = 1, *d*(*Mic*, *Mediu*) = *d*(*Mediu*, *Mare*) = 0,5 ş.a.m.d.

Pentru atributele numerice, distanţa este valoarea absolută a diferenţei dintre valorile normalizate ale atributelor.

9.5. Numărul optim de vecini

Decizia privind numărul de vecini consideraţi este foarte importantă. După cum se poate vedea în figura 9.3, mărind numărul de vecini (implicit

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

distanța față de instanța de interogare), putem să luăm în calcul doi, trei vecini sau chiar toate instanțele de antrenare. Însă dacă instanțele unei clase sunt grupate, cum este cazul de obicei, pe măsură ce mărim distanța şi includem mai mulți vecini, s-ar putea să ne îndepărtăm prea mult şi să includem instanțe din alte clase, care vor afecta rezultatul clasificării.

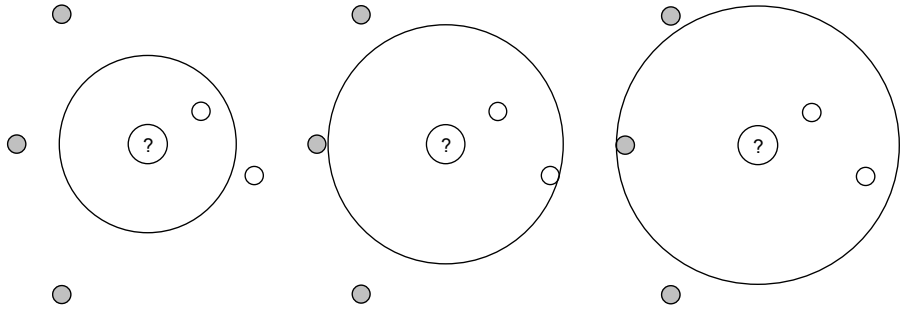


Figura 9.3. *Vecinătăţile unui punct cu 1, 2 şi 3 vecini*

Determinarea numărului optim de vecini *k* poate fi dificilă. Când *k* este prea mic, clasificarea poate fi afectată de zgomot. Când *k* este prea mare, vecinătatea poate include puncte din alte clase.

Figura 9.4 prezintă regiunile de decizie pentru o problemă arbitrară de clasificare binară cu instanțe de antrenare bidimensionale „albe" şi „negre", culoarea indicând clasa instanței. Regiunile de decizie indică deciziile de clasificare pentru toate punctele din plan – fiecare punct este considerat o instanță de interogare care trebuie clasificată în funcție de instanțele de antrenare date.

După cum se vede din această figură, la această metodă de clasificare regiunile de decizie sunt oarecum neregulate dar interesante, ceea ce le conferă şi o anumită calitate estetică.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Figura 9.4. *Regiuni de decizie pentru o problemă de clasificare binară*

Atunci când datele de antrenare sunt afectate de zgomot, clasa celui mai apropiat vecin ar putea fi greşită, iar mai mulţi vecini ar putea compensa erorile. Figura 9.5 prezintă regiunile de decizie într-o astfel de situaţie pentru $k = 1$.

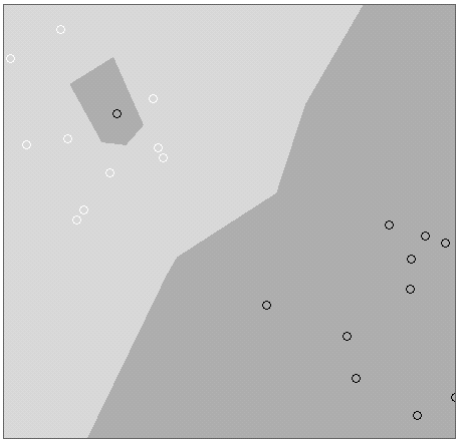


Figura 9.5. *Regiuni de decizie pentru date afectate de zgomot cu k = 1*

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Figura 9.6 prezintă regiunile de decizie pentru $k = 3$.

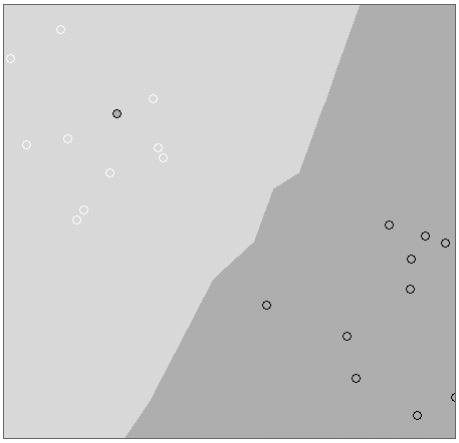


Figura 9.6. *Regiuni de decizie pentru pentru date afectate de zgomot cu k = 3*

Se vede că în ciuda existenței unei instanțe „negre" în zona „albă", regiunea de decizie „albă" nu mai conține acum o subregiune „neagră".

În general, nu putem spune care din situațiile prezentate în figurile 9.5 şi 9.6 este de dorit. Dacă punctul „negru" izolat este corect, acesta poate reprezenta o excepție importantă, iar algoritmul *NN* este o metodă foarte bună pentru a-l lua în considerare. Metoda bayesiană naivă, unde impactul majorității este puternic, poate l-ar fi ignorat. Pentru un arbore de decizie ar putea reprezenta o eroare pe mulțimea de antrenare, sau dacă se foloseşte retezarea, frunza corespunzătoare ar putea fi eliminată.

Dacă punctul este însă clasificat greşit, este bine să fie eliminat sau influența lui să fie redusă, ceea ce se poate realiza considerând un număr mai mare de vecini. Pentru fiecare abordare există avantaje şi dezavantaje.

În general, numărul optim de vecini se poate determina prin validare încrucişată, metodă prezentată în secțiunea 6.5.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

9.6. Blestemul dimensionalităţii

O altă problemă la care sunt sensibile metodele bazate de instanţe este aşa numitul „blestem al dimensionalităţii”. Dacă ne imaginăm un segment de dreaptă între 0 şi 1, lungimea sa este 1. Dacă ne imaginăm un pătrat, lungimea între vârfurile opuse, de coordonate (0,0) şi (1,1), este $\sqrt{2}$. Dacă ne imaginăm un cub, lungimea diagonalei este $\sqrt{3}$. Dacă avem un hipercub cu 100 de dimensiuni, lungimea diagonalei este 10. Cu cât creşte numărul de atribute, datele devin mai rare în acel spaţiu. Dacă avem 3 valori distribuite egal pe diagonale, în spaţiul unidimensional distanţa între ele este 0,5 (0 – 0,5 – 1), pe când în spaţiul cu 100 de dimensiuni, distanţa este 5. Cu cât sunt mai rare datele, cu atât este mai greu pentru clasificator să realizeze un model precis.

De asemenea, dacă vom considera un grid pe care valorile sunt egal distribuite, câte 3 pe fiecare dimensiune, pentru a păstra o distanţă constantă între valori, în cazul unidimensional avem nevoie de 3 date, în cazul 2D avem nevoie de 9 date, în cazul 3D avem nevoie de 27 date iar în cazul 100D avem nevoie de $3^{100} = 5 \cdot 10^{47}$ date. Odată cu creşterea dimensionalităţii, necesarul de date pentru a păstra aceeaşi densitate creşte exponenţial.

9.7. Ponderarea instanţelor

După cum am menţionat, este greu să determinăm cea mai bună valoare pentru numărul de vecini. Putem însă să ne gândim că vecinul cel mai apropiat, fiind mai asemănător, contează mai mult pentru clasificare

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

decât instanțele mai îndepărtate. Se poate face astfel ponderarea contribuției instanțelor de antrenare în funcție de distanța față de instanța de interogare. O funcție des utilizată pentru ponderare este inversul pătratului distanței:

$$w_i = \frac{1}{d\left(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_i\right)^2} \tag{9.3}$$

unde *i* este indicele unei instanțe de antrenare iar *d* este o metrică de distanță.

Distanța este o măsură a similarității: când distanța este mare, similaritatea şi deci şi ponderea corespunzătoare, tind la 0. Când distanța este mică, ponderea creşte.

Dacă $d\left(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_i\right) = 0$, ceea ce ar presupune ca ponderea să tindă la infinit, dominând oricum clasificarea, se alege direct clasa corespunzătoare instanței din acel punct: $C\left(\mathbf{x}_q\right) = C(\mathbf{x}_i)$.

Prin ponderare, putem folosi întreaga mulțime de antrenare pentru clasificare, întrucât instanțele mai îndepărtate vor avea pondere mai mică şi nu vor conta foarte mult. Este ca şi cum vecinătatea optimă ar fi determinată în mod dinamic. Astfel, se transformă abordarea locală, cu o submulțime de *k* instanțe, într-o abordare globală.

9.8. Ponderarea şi selecția atributelor

Selecția atributelor este o problemă esențială din punct de vedere psihologic. Ponderea atributelor, nu a instanțelor, este foarte importantă

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

pentru modul în care iau oamenii decizii. Aceste ponderi semnifică ceea ce considerăm mai semnificativ la un moment dat.

Să spunem că o persoană culege flori, fără nicio altă constrângere. Atributele cele mai importante pot fi culoarea, mirosul, aspectul estetic etc. Dar dacă merge să caute plante medicinale, importanța atributelor se modifică pentru a respecta noile criterii – proprietățile medicinale (după Miclea, 1999).

Instanțele (plantele) şi atributele (criteriile) sunt aceleaşi, dar decizia de clasificare, de a culege sau nu anumite exemplare, depinde de importanța atributelor.

Scopul omului determină importanța atributelor.

Din punct de vedere computațional, schimbarea ponderii atributelor este echivalentă cu lungirea sau scurtarea axelor în spațiul multi-dimensional. Atributelor mai importante le vor corespunde axe mai lungi, ceea ce determină distanțe mai mari, ce vor avea un efect mai puternic asupra rezultatului clasificării, chiar dacă valorile instanțelor rămân normalizate între 0 şi 1. Axele corespunzătoare atributelor mai puțin importante, care pot fi şi irelevante, se scurtează.

O modalitate de a determina importanța atributelor este chiar utilizarea câştigului informațional, descris în secțiunea 7.4.

Există şi algoritmi specializați, cum ar *Relief* (Kira & Rendell, 1992; Kononenko, 1994). Ideea de bază este următoarea. Se inițializează ponderile atributelor cu 0. Pentru fiecare instanță x_q din mulțimea de antrenare, se găseşte cea mai apropiată instanță din aceeaşi clasă (*hit*) şi cea mai apropiată instanță dintr-o clasă diferită (*miss*) şi se actualizează ponderea atributului după formula:

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

$$w_a \leftarrow w_a + \frac{\left|x_{q,a} - x_{miss,a}\right| - \left|x_{q,a} - x_{hit,a}\right|}{x_{max} - x_{min}} \tag{9.4}$$

Pentru a explica funcționarea sa, vom considera o problemă de clasificare binară (*D* sau *N*) cu două atribute. Instanțele au următoarele valori pentru atributul 1, în corespondență cu clasa:

Atributul 1	**Clasa**
$x_{11} = 1$	C = N
$x_{21} = 1,5$	C = N
$x_{31} = 2$	C = D
$x_{41} = 3$	C = D

Algoritmul se bazează pe o serie de iterații, în care valorile sunt normalizate, diferența dintre valoarea maximă şi cea minimă fiind 3 – 1 = 2:

x_{11}: hit x_{21}, miss x_{31}, $\Delta w_1 = (1 – 0,5) / 2 = 0,25 \Rightarrow w_1 = 0,25$

x_{21}: hit x_{11}, miss x_{31}, $\Delta w_1 = (0,5 – 0,5) / 2 = 0 \Rightarrow w_1 = 0,25$

x_{31}: hit x_{41}, miss x_{21}, $\Delta w_1 = (0,5 – 1) / 2 = -0,25 \Rightarrow w_1 = 0$

x_{41}: hit x_{31}, miss x_{21}, $\Delta w_1 = (1,5 – 1) / 2 = 0,25 \Rightarrow w_1 = 0,25$

În această situație, $w_1 = 0,25$.

Pentru atributul 2, să presupunem că instanțele au următoarele valori în corespondență cu clasa:

Atributul 2	**Clasa**
$x_{12} = 1$	C = N
$x_{22} = 2$	C = N
$x_{32} = 1,5$	C = D
$x_{42} = 3$	C = D

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

x_{12}: hit x_{22}, miss x_{32}, $\Delta w_2 = (0,5 - 1) / 2 = -0,25 \Rightarrow w_2 = -0,25$

x_{22}: hit x_{12}, miss x_{32}, $\Delta w_2 = (0,5 - 1) / 2 = -0,25 \Rightarrow w_2 = -0,5$

x_{32}: hit x_{42}, miss x_{12}, $\Delta w_2 = (0,5 - 1,5) / 2 = -0,5 \Rightarrow w_2 = -1$

x_{42}: hit x_{32}, miss x_{22}, $\Delta w_2 = (1 - 1,5) / 2 = -0,25 \Rightarrow w_2 = -1,25$

În această situaţie, $w_2 = -1,25$.

Se observă că atributul 1 este mai important, deoarece separă mai uşor cele două clase, cu o singură valoare de referinţă: 1,75.

Spre deosebire de metoda bayesiană naivă, algoritmii *NN* şi *kNN* sunt mai sensibili la prezenţa atributelor irelevante. De aceea, eliminarea acestora poate îmbunătăţi foarte mult performanţele de clasificare. Cunoscând ponderile atributelor, poate fi selectată o submulţime de atribute mai importante. Acest fapt conduce de asemenea la scăderea numărului de dimensiuni şi la creşterea vitezei clasificării.

9.9. Exemplu de clasificare

Pentru exemplificarea celor doi algoritmi, *NN* şi *kNN*, vom considera aceeaşi problemă a jocului de golf în funcţie de condiţiile meteorologice, cu atribute atât simbolice cât şi numerice, prezentată din nou în tabelul 9.1.

Ne propunem clasificarea instanţei: x_q = (*Soare*, 26, 72, *Absent*).

Putem interpreta atributul *Starea vremii* ca fiind ordinal, cu ordinea valorilor { *Ploaie*, *Înnorat*, *Soare* }. Acestea vor lua valorile numerice 0, 0,5, respectiv 1. Atributul *Vânt* este binar şi putem transforma valorile simbolice *Absent* şi *Prezent* în valorile numerice 0, respectiv 1. Mulţimea de antrenare va deveni acum cea din tabelul 9.2.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Tabelul 9.1. *Problemă de clasificare cu atribute mixte*

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
1	Soare	29,4	85	Absent	Nu
2	Soare	26,7	90	Prezent	Nu
3	Înnorat	28,3	86	Absent	Da
4	Ploaie	21,1	96	Absent	Da
5	Ploaie	20,0	80	Absent	Da
6	Ploaie	18,3	70	Prezent	Nu
7	Înnorat	17,8	65	Prezent	Da
8	Soare	22,2	95	Absent	Nu
9	Soare	20,6	70	Absent	Da
10	Ploaie	23,9	80	Absent	Da
11	Soare	23,9	70	Prezent	Da
12	Înnorat	22,2	90	Prezent	Da
13	Înnorat	27,2	75	Absent	Da
14	Ploaie	21,7	91	Prezent	Nu

Tabelul 9.2. *Transformarea atributelor simbolice în atribute numerice*

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
1	1	29,4	85	0	Nu
2	1	26,7	90	1	Nu
3	0,5	28,3	86	0	Da
4	0	21,1	96	0	Da
5	0	20,0	80	0	Da
6	0	18,3	70	1	Nu
7	0,5	17,8	65	1	Da
8	1	22,2	95	0	Nu
9	1	20,6	70	0	Da
10	0	23,9	80	0	Da
11	1	23,9	70	1	Da
12	0,5	22,2	90	1	Da
13	0,5	27,2	75	0	Da
14	0	21,7	91	1	Nu

Valorile atributului *Temperatură* aparţin intervalului [17,8, 29,4], iar valorile atributului *Umiditate* aparţin intervalului [65, 96]. Acestea trebuie normalizate, conform ecuației 9.2, şi sunt prezentate în tabelul 9.3.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Tabelul 9.3. *Normalizarea atributelor*

Temperatură	Umiditate	Temperatură normalizată	Umiditate normalizată
29,4	85	1,000	0,645
26,7	90	0,767	0,806
28,3	86	0,905	0,677
21,1	96	0,284	1,000
20,0	80	0,190	0,484
18,3	70	0,043	0,161
17,8	65	0,000	0,000
22,2	95	0,379	0,968
20,6	70	0,241	0,161
23,9	80	0,526	0,484
23,9	70	0,526	0,161
22,2	90	0,379	0,806
27,2	75	0,810	0,323
21,7	91	0,336	0,839

Ca metrică de distanţă vom utiliza distanţa euclidiană. Algoritmii presupun calculul distanţelor dintre x_q şi toate instanţele din mulţimea de antrenare. Instanţa de interogare trebuie şi ea transformată în acelaşi mod.

Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc
Soare	26	72	Absent	?
1	0.707	0.226	0	?

Distanţa dintre x_q şi instanţa de antrenare x_1 se calculează luând în considerare toate atributele:

$$d(x_q, x_1) = \sqrt{(1-1)^2 + (0{,}707-1)^2 + (0{,}226-0{,}645)^2 + (0-0)^2} = 0{,}5113.$$

Analog se procedează pentru toate celelalte instanţe din mulţimea de antrenare, rezultatele fiind precizate în tabelul 9.4.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Tabelul 9.4. *Calculul distanţelor*

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc	Distanţa
1	1	1	0,645	0	Nu	0,5113
2	1	0,767	0,806	1	Nu	1,1576
3	0,5	0,905	0,677	0	Da	0,7019
4	0	0,284	1	0	Da	1,3334
5	0	0,19	0,484	0	Da	1,1549
6	0	0,043	0,161	1	Nu	1,5637
7	0,5	0	0	1	Da	1,3420
8	1	0,379	0,968	0	Nu	0,8113
9	1	0,241	0,161	0	Da	0,4705
10	0	0,526	0,484	0	Da	1,0485
11	1	0,526	0,161	1	Da	1,0183
12	0,5	0,379	0,806	1	Da	1,3015
13	0,5	0,81	0,323	0	Da	0,5196
14	0	0,336	0,839	1	Nu	1,5854

Pentru atributul *Starea vremii* am făcut presupunerea că este de tip ordinal şi de aceea pentru instanțele 3, 7, 12 şi 13 distanța pe acest atribut este 0,5. Dacă l-am fi considerat simbolic, aceste distanțe ar fi fost 1.

Tabelul de mai jos conține aceleaşi date sortate în ordine crescătoare a distanței.

Nr. instanţă	Starea vremii	Temperatură	Umiditate	Vânt	Joc	Distanţa
9	1	0,241	0,161	0	Da	0,4705
1	1	1	0,645	0	Nu	0,5113
13	0,5	0,81	0,323	0	Da	0,5196
3	0,5	0,905	0,677	0	Da	0,7019
8	1	0,379	0,968	0	Nu	0,8113
11	1	0,526	0,161	1	Da	1,0183
10	0	0,526	0,484	0	Da	1,0485
5	0	0,19	0,484	0	Da	1,1549
2	1	0,767	0,806	1	Nu	1,1576
12	0,5	0,379	0,806	1	Da	1,3015
4	0	0,284	1	0	Da	1,3334
7	0,5	0	0	1	Da	1,3420
6	0	0,043	0,161	1	Nu	1,5637
14	0	0,336	0,839	1	Nu	1,5854

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Dacă se aplică algoritmul *NN*, avem nevoie doar de instanţa cea mai apropiată de x_q, în acest caz x_9. Algoritmul nu necesită sortarea datelor după distanţă, ci doar găsirea instanţei cu distanţă minimă. Rezultatul clasificării cu *NN* va fi clasa instanţei x_9, adică *Da*.

Dacă se aplică algoritmul *kNN*, putem considera cei mai apropiaţi (de exemplu 3) vecini, sau pe toţi. Tabelul următor indică rezultatele clasificării după numărul de voturi ai vecinilor.

Numărul de vecini	**Numărul de voturi**	**Decizia de clasificare**
$k = 1$	1 Da – 0 Nu	Da
$k = 2$	1 Da – 1 Nu	Indecis
$k = 3$	2 Da – 1 Nu	Da
$k = 4$	3 Da – 1 Nu	Da
…	…	…
$k = 14$	9 Da – 5 Nu	Da

De asemenea, putem pondera influenţa vecinilor conform ecuaţiei 9.3. Tabelul 9.5 prezintă ponderile instanţelor, ca inverse ale pătratelor distanţei euclidiene.

Tabelul 9.5. *Ponderarea instanţelor*

Nr. instanţă	**Joc**	**Distanţa**	**Ponderea**
1	Nu	0,5113	3,8254
2	Nu	1,1576	0,7463
3	Da	0,7019	2,0300
4	Da	1,3334	0,5624
5	Da	1,1549	0,7497
6	Nu	1,5637	0,4090
7	Da	1,3420	0,5553
8	Nu	0,8113	1,5194
9	Da	0,4705	4,5171
10	Da	1,0485	0,9096
11	Da	1,0183	0,9643
12	Da	1,3015	0,5903
13	Da	0,5196	3,7035
14	Nu	1,5854	0,3979

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Se calculează suma ponderilor pentru instanțele care au clasa *Da*: $S_D = 14{,}5822$ şi suma ponderilor pentru instanțele care au clasa *Nu*: $S_N = 6{,}898$. Prin urmare, instanța de interogare este clasificată în clasa *Da*.

9.10. Concluzii

Clasificatorii bazați pe instanțe sunt considerați *pasivi* (engl. "lazy learners"), deoarece modelul nu este construit explicit iar efortul de calcul se face la aplicarea modelului, pentru clasificarea instanțelor noi. În schimb, arborii de decizie de exemplu sunt considerați clasificatori *activi* (engl. "eager learners"), deoarece efortul de calcul se face la crearea modelului, înaintea clasificării efective a unei instanțe noi. Clasificatorii pasivi necesită mai puțin timp de calcul pentru antrenare şi mai mult pentru predicție.

Ratele de eroare ale algoritmilor *NN* şi *kNN* sunt de obicei mici. Dacă nu există zgomot în date, rata de eroare pe mulțimea de antrenare este în general 0. Întrucât folosesc toate informațiile disponibile, şi capacitatea de generalizare este de multe ori foarte bună.

Determinarea celui mai apropiat vecin are o complexitate de timp liniară în numărul de instanțe. Pentru mulțimi de antrenare foarte mari, timpul poate fi redus prin utilizarea, de exemplu, a arborilor *k*-dimensionali (engl. "kd-trees", Bentley, 1975), unde *k* semnifică aici numărul de atribute (sau dimensiuni). Astfel, complexitatea poate fi redusă la un nivel logaritmic. Cu toate acestea, când numărul de atribute este foarte mare, comparabil cu numărul de instanțe, performanțele căutării cu arbori *kd* devin apropiate căutării exhaustive. Pentru ca această metodă să fie eficientă, trebuie îndeplinită condiția $n \gg 2^k$, unde n este numărul de instanțe iar k este numărul de atribute.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Referințe

[1] Aaronson, S. (2006). *Quantum Computing Since Democritus*, http://www.scottaaronson.com/democritus/default.html

[2] Amir, E. & Richards, M. (2008). *Variable Elimination in Bayesian Networks*, http://www.cs.uiuc.edu/class/sp08/cs440/notes/varElimLec.pdf

[3] Ardis, P. (2010). *Notes on Dempster Shafer Belief Functions*, www.cs.rochester.edu/~ardis/DempsterShafer.pdf

[4] Bao, J. (2002). *Artificial Intelligence Exercises*, http://www.cs.iastate.edu/~baojie/acad/teach/ai/hw4/2002-12-06_hw4sol.htm

[5] Bayes, T. (1763). *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 53, pp. 370-418

[6] Bentley, J. L. (1975). *Multidimensional binary search trees used for associative searching*, Communications of the ACM, vol. 18, no. 9, pp. 509-517

[7] BlackLight Power Inc. (2005). *Double Slit. Explanation of Classical Electron Diffraction*, http://www.blacklightpower.com/theory-2/theory/double-slit/

[8] Breiman, L. (1996). *Some Properties of Splitting Criteria*, http://fbf.cba.ua.edu/~mhardin/BreimanMachineLearning1996.pdf

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

[9] Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A. & Stone, C. J. (1984). *Classification and regression trees*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, California

[10] Changing Minds (2012). *Types of data*, http://changingminds.org/explanations/research/measurement/types_data.htm

[11] Cheng, J. & Druzdzel, M. J. (2000). *AIS-BN: An Adaptive Importance Sampling Algorithm for Evidential Reasoning in Large Bayesian Networks*, Journal of Artificial Intelligence Research, vol. 13, pp. 155-188

[12] Cheng, J. & Druzdzel, M. J. (2000). *Latin hypercube sampling in Bayesian networks*, in Proceedings of the Thirteenth International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference (FLAIRS-2000), Jim Etheredge & Bill Manaris (eds), pp. 287-292, Menlo Park, California, AAAI Press

[13] Cheng, J. (2001). *Efficient stochastic sampling algorithms for Bayesian networks*, Ph.D. Dissertation, School of Information Sciences, University of Pittsburgh, http://www2.sis.pitt.edu/~jcheng/Cheng_dissertation.pdf

[14] Dempster, A. P. (1968). *A generalization of Bayesian inference*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol. 30, pp. 205-247

[15] Doherty, M., *Learning: Introduction and Overview*, http://www1.pacific.edu/~mdoherty/comp151/lectures/learning_intro.ppt

[16] Freund, Y. & Schapire, R. E. (1995). *A Decision-Theoretic Generalization of on-Line Learning and an Application to Boosting*, Proceedings of the Second European Conference on

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

Computational Learning Theory, pp. 23-37, Springer-Verlag London, UK

[17] Fung, R. & Chang, K. (1990). *Weighting and integrating evidence for stochastic simulation in bayesian networks*, in M. Henrion, R.D. Shachter, L. N. Kanal, and J. F. Lemmer (eds.), Uncertainty in Artificial Intelligence, vol. 5, pp. 209-219, North Holland, Amsterdam

[18] Hájek, A. (2012). *Interpretations of Probability*, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2012 Edition),* Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/probability-interpret/

[19] Han, D., Han. C. & Yang, Y. (2008). *A Modified Evidence Combination Approach Based on Ambiguity Measure*, Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion, pp. 1-6

[20] Harrison D. M. (2008). *Mach-Zehnder Interferometer*, http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/MachZehnder/MachZehnder.html

[21] Hsu, W. H. (2001). *Decision Trees, Occam's Razor, and Overfitting*, http://www.kddresearch.org/Courses/Fall-2001/CIS732/Lectures/Lecture-05-20010906.pdf

[22] Hunt, E.B. (1962). *Concept learning: An information processing problem*, Wiley, NewYork

[23] Kahn, A. B. (1962). *Topological sorting of large networks*, Communications of the ACM, vol. 5, no. 11, pp. 558-562

[24] Keynes, J. M. (1921). *A Treatise on Probability* (Chapter IV. The Principle of Indifference), Macmillan and Co.

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

[25] Kira, K. & Rendell, L. A. (1992). *A Practical Approach to Feature Selection*, Proceedings of the Ninth International Workshop on Machine Learning, pp. 249-256

[26] Kononenko, I. (1994). *Estimation Attributes: Analysis and Extensions of RELIEF*, European Conference on Machine Learning, Catania, Italy, Springer-Verlag

[27] Kubalik, J. (2000). *Machine Learning*, http://cyber.felk.cvut.cz/gerstner/HUT2000/ml/ml1.ppt

[28] Lawrence, A. E. (1997). *Microprocessor Unit (μPU): Glossary*, http://www-staff.lboro.ac.uk/~coael/gloss.html

[29] Lee, P. M. (1989). *Bayesian Statistics: an introduction*, Oxford University Press.

[30] Livescu, K. (2003). *A Practical Introduction to Graphical Models and their use in ASR*, http://people.csail.mit.edu/klivescu/6.345/6.345-spring03_v4.ppt

[31] MacQueen, J. B. (1967). *Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations*, Proceedings of 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, pp. 281-297

[32] Miclea, M. (1999). *Psihologie cognitivă*, Polirom, Iaşi

[33] Mitchell, T. M. (1997). *Machine Learning*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math

[34] Moore, A. (2001). *Probabilistic and Bayesian Analytics*, http://www.autonlab.org/tutorials/prob17.pdf

[35] Nielsen, M. A. & Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

[36] Nilsson, N. J. (2001). *Introduction to Machine Learning*, http://robotics.stanford.edu/people/nilsson/mlbook.html

[37] Ooi, Y. H. (2004). *Simpson's Paradox – A Survey of Past, Present and Future Research*, University of Pennsylvania, http://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1014

[38] Paskin, M. (2003). *A Short Course on Graphical Models. Structured Representations*, http://ai.stanford.edu/~paskin/gm-short-course/lec2.pdf

[39] PEAR (2010). *Princeton Engineering Anomalies Research. Scientific Study of Consciousness-Related Physical Phenomena*, http://www.princeton.edu/~pear/

[40] Quinlan, J. R. (1986). *Induction of Decision Trees*, Machine Learning, vol. 1, pp. 81-106

[41] Quinlan, J. R. (1993). *C4.5: Programs for Machine Learning*, Morgan Kaufman Publishers

[42] Rogers, T. (2001). *Simpsons's Paradox - When Big Data Sets Go Bad*, in Amazing Applications of Probability and Statistics, http://www.intuitor.com/statistics/SimpsonsParadox.html

[43] Russell, S. J. & Norvig, P. (2002). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Prentice Hall, 2nd Edition

[44] Seo, Y. W. & Sycara, K. (2006). *Combining multiple hypotheses for identifying human activities*, Technical report CMU-RI-TR-06-31, Robotics Institute, Carnegie Mellon University

[45] Shachter, R. D. & Peot, M. (1990). *Simulation approaches to general probabilistic inference on belief networks*, in M. Henrion, R. D. Shachter, L. N. Kanal, and J. F. Lemmer (eds.), Uncertainty in Artificial Intelligence, vol. 5, pp. 221-231, North Holland, Amsterdam

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

[46] Shachter, R. D. (1998). *Bayes-Ball: The Rational Pastime (for Determining Irrelevance and Requisite Information in Belief Networks and Influence Diagrams)*, Proceedings of the Fourteenth Conference in Uncertainty in Artificial Intelligence, pp. 480-487

[47] Shafer, G. (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press

[48] Shannon, C. E. (1948). *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423 (July), pp. 623-656 (October)

[49] Simon, H. A. (1983). *Reason in Human Affairs*, Stanford University Press

[50] Simpson, E. H. (1951). *The Interpretation of Interaction in Contingency Tables*, Journal of Royal Statistical Society Ser.B, vol. 13, no. 2, pp. 238-241

[51] Smets, P. & Kennes, R. (1994). *The Transferable Belief Model*, Artificial Intelligence, vol. 66, pp. 191-243

[52] Tan, P. N., Steinbach, M. & Kumar, V. (2006). *Introduction to Data Mining*, Addison-Wesley

[53] Vucetic, S. (2004). *Alternative Classification Algorithms*, http://www.ist.temple.edu/~vucetic/cis526fall2004/lecture8.ppt

[54] Witten, I. H. & Frank, E. (2000). *Data Mining: Practical machine learning tools with Java implementations*, Morgan Kaufmann, San Francisco

[55] Yager, R. (1987). *On the Dempster-Shafer Framework and New Combination Rules*, Information Sciences, vol. 41, pp. 93-137

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com

[56] Yuan, C. & Druzdzel, M. J. (2003). *An importance sampling algorithm based on evidence pre-propagation*, in Proceedings of the 19th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-03), pp. 624-631, Morgan Kaufmann Publishers San Francisco, California

[57] Zadeh, L. (1979). *On the validity of Dempster's rule of combination*, Memo M79/24, University of California, Berkeley, USA

Florin Leon (2012). Inteligenta artificiala: rationament probabilistic, tehnici de clasificare
Tehnopress, Iasi, ISBN 978-973-702-932-4, http://florinleon.byethost24.com